tanulmányok 82/1979

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

SZABÀLYOS JOB-FOLYAM PÀROK ÜTEMEZÈSÈNEK VIZSGÁLATA I.

Irta:

TANKÓ JÓZSEF

Tanulmányok 82/1978.

A kiadásért felelős:

DR VÁMOS TIBOR

ISBN 963 311 069 6

ISSN 0324-2951

7910234 MTA KESZ Sokszorosító, Budapest. F. v.: dr. Héczey Lászlóné

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATO INTÉZETE

Irodalom

a

SZABÁLYOS JOB-FOLYAM PÁROK ÜTEMEZÉSÉNEK VIZSGÁLATA I.

cimü tanulmányhoz

Irta:

TANKÓ JÓZSEF

K i e g é s z i t é s

a

Tanulmányok 82/1978

kötethez

7911027 MTA KESZ Sokszorosító, Budapest. F. v.: dr. Héczey Lászlóné

Irodalom

[A1] Ackoff,R.L./Ed./: Progress in Operations Research. Wiley, 1961

[A2] Abramson,N.,Kuo,F.F./Ed./: Computer-Communication Networks. Prentice-Hall, 1973

[A3] Allen,F.E: Program Optimization. Pergamon Press, 1969

[A4] Arató Mátyás: Diffusion approximation for multiprogrammed computer systems. Comp. et Math. with Appl. 1., Pergamon Press, 1975, 315-326 o.

[A5] Aho,A.W.,Hopcroft,J.E.,Ullman,J.D: The Design and Analysis of Computer Algorithms. Addison-Wesley,1974

[A6] Ashour,Said: An experimental investigation and comparative evaluation of flow-shop scheduling techniques. Oper. Res. 18,3 /197o/, 541-49 o.

[A7] Adiri,I: Queueing models for multiprogrammed computers. Proc. Symp. Computer-Communication Networks and Teletraffic. Polytechnic Press, New York, 1972,441-8 o.

[B1] Baker,K: Introduction to Sequencing and Scheduling. Wiley, 1974

[B2] Barron,D.W: Computer Operating Systems. Chapman and Hall Ltd., 1971

[B3] Brinch-Hansen,P: Operating Systems Principles. Prentice-Hall, 1973

[B4] Belady,L.A: A study of replacement algorithms for a virtual-storage computer. IBM Syst. J. 5,2 /1966/, 78-1o1 o.

[B5] Borodin,A.,Munro,I: The Computational Complexity of Algebraic and Numerical Problems. Am. Elsevier, 1975

[B6] Bruno,J.,Coffman,E.G.,Sethi,Jr.and R: Scheduling independent tasks to reduce mean finishing time. Commun. of the ACM 17,5 /1974/ 382-7 o.

[B7] Bruno,J.,Sethi,R: On the Complexity of Mean Flow-Time Scheduling. Tech. Rep., Comp. Sc. Dpmt. Pennsylvania State Univ., 1975

[B8] Brucker,P.,Lenstra,J.K.,Rinoy Kan,A.H.G: Complexity of Machine Scheduling Problems. Tech. Rep. BW 43/75. Math. Centrum Amsterdam, 1975

[B9] Bellman,R: Mathematical aspects of scheduling theory. J. Soc. Ind. and Ap. Math. 4 /1956/, 168-2o5

[B1o] Bharucha-Reid,A.T: Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. McGraw-Hill, 196o

[B11] Buzen,J: Queueing Network Models of Multiprogramming. Ph.D.Thesis. Harward Univ. Cambridge, 1971

[B12] Baskett,F.,Muntz,R.R: Queueing network models with different classes of customers. Proc. 6th Annual IEEE Int. Conf. 1972, 2o5-9 o.

[C1] Cohen,J.W: The Single Server Queue. North Holland,1969

[C2] Conway,R.,Maxwell,L.,Miller,L: Theory of Scheduling. Addison-Wesley, 1967

[C3] Coffman,E.G./Ed./: Computer and Job-Shop Scheduling Theory. Wiley Intersc.,1976

[C4] Colin,A.J.T: Bevezetés az operációs rendszerek tanulmányozásába. KSH, 1976

[C5] Coffman,E.G.,Denning,Jr.and P.J: Operating Systems Theory. Prentice-Hall, 1973

[C6] Cook,S.A: The complexity of theorem-proving procedures. Proc. 3d ACM Symp. on Theory of Computing, 1971, 151-158 o.

[C7] Charlton,J.M.,Death,C.C: A method of solution for general machine-scheduling problems. Oper. Res. 18 /197o/,689-7o7 o.

[C8] Campbell,H.G.,Dudek,R.A.,Smith,M.L: A heuristic algorithm for n job m machine sequencing problem. Man. Sc. 16, 1o /197o/ B63o-B637 o.

[C9] Coffman,E.G: Studying multiprogramming systems with the queueing theory. Datamation 13 /June 1967/

[C1o] Clark,W: The Gantt Chart. Sir Isaac Pitman et Sons, London, 1952

[D1] Deo,N: Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science. Prentice-Hall, 1974

[D2] Dennis,J.B: Segmentation and the design of multi-programmed computer systems. J. of the ACM 12,4/1965/ 589-6o2 o.

[D3] Denning,P.J: Virtual memory. ACM Computing Surveys 2, 3 /197o/, 153-89 o.

[D4] Denning,P.J: The working set model for program behavior. Commun. of the ACM 11,5 /1968/ 323-33 o.

[D5] Dijkstra,E.W: The structure of the THE multiprogramming system. Commun. of the ACM 11,5 /1968/ 341-56 o.

[E1] Elmaghraby,S.E./Ed./: Symposium on the Theory of Scheduling and its Applications. Springer, NY, 1973

[E2] Edmonds,J: Paths, trees and flowers. Canadien J. of Math. 17 /1965/ 449-67 o.

[F1] Feller,W: An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol.1,1958, Vol.2, 1966, Wiley

[F2] Fineberg,M.S.,Serlin,O: Multiprogramming for hybrid computation. Proc. AFIPS FJCC, 1967

[G1] Gonzalez,T.,Ibarra,O.H.,Sahni,S: Bounds for LPT schedules on uniform processors. SIAM J.on Computing 6,1 /March 1977/ 155-66 o.

[G2] Gaver,D.P.,Shedler,G.S: Processor utilisation in multiprogramming systems via diffusion approximations. Oper. Res. 21,2 /1973/ 569-76 o.

[G3] Gaver,D.P.,Shedler,G.S: Approximate models for processor utilization in multiprogrammed computer systems. SIAM J. on Computing 2,3 /1973/ 183-92 o.

[G4] Graham,R.L: Bounds on multiprocessing timing anomalies. SIAM J. on Applied Math. 17,2 /1969/ 416-29 o.

[G5] Garey,M.R.,Johnson,D.S: Complexity results for multiprocessor scheduling under resource constraints. SIAM J. on Computing 4,4 /1975/ 397-411 o.

[G6] Garey,M.R.,Johnson,D.S.,Sethi,R: Complexity of flowshop and jobshop scheduling. Math. Oper. Res.1/1976/ 117-29 o.

[G7] Gill,J: Computational complexity of probabilistic Turing machines. SIAM J. on Computing 6,4 /1977/675-95 o.

[G8] Giglio,R.J.,Wagner,H.M: Approximate solution to the three-machine scheduling problem. Oper. Res. 12,2 /1964/ 3o5-24 o.

[G9] Greenberg,H.H: A branch-bound solution to the general scheduling problem. Oper. Res, 16,2 /1968/ 353-61 o.

[G1o] Giffler,B.,Thompson,G.L: Algorithms for solving production-scheduling problems. Oper. Res. 8,4 /196o/ 483-5o3 o.

[G11] Garey,M.R.,Johnson,D.S: Two-processor scheduling with start-times and deadlines. SIAM J. on Computing 6,3 /Sept. 1977/ 416-26 o.

[G12] Garey,M.R.,Johnson,D.S: Scheduling tasks with non-uniform deadlines on two processors. J. of the ACM 23 /1976/ 461-7 o.

[G13] Gonzalez,Jr.M.J.,Soh,J.W: Periodic job scheduling in a distributed processor system. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Syst. Vol. AES-12,No 5/1976/53o-5

[G14] Gaver,D.P: Probability models for multiprogramming computer systems. J, of the ACM 14,3 /1967/ 423-38 o.

[H1] Hoare,C.A.R.,Perrott,R.M./Ed./: Operating Systems Techniques. Proc. of a Seminar h.at Queen's Univ. Belfast 1971. Acad. Press 1972

[H2] Heller,J: Some numerical experiments for an MxJ flow-shop and its decision-theoretical aspects. Oper. Res. 8,2 /196o/ 178-84 o.

[I1] Information Processing '74. Vol. 2: Software, Vol. 3: Mathematical Aspects of Information Processing. IFIP Congress 74, Preprints, North-Holland, 1974

[I2] Ignall,E.,Schrage,L: Application of the branch-and-bound technique to some flow-shop scheduling problems. Oper. Res. 13,3 /1965/ 4oo-412 o.

[J1] Johnson,S.M: Optimal two- and three-stage production schedules with set-up times included. Naval Res. and Logistics Quart. 1,1 /March 1954/ 61-68 o. ; [M1]-ben 13-2o old.

[J2] Jackson,J.R: An extension of Johnson's results on job-lot scheduling. Naval Res. and Logistics Quart. 3,3 /Sept. 1956/

[J3] Johnson,S.M: Discussion: Sequencing in jobs on two machines with arbitrary time lags. Man. Sci. 5,3 /April 1959/

[J4] Jackson,J.R: Networks of waiting lines. Oper. Res. 5 /1957/ 518-21

[K1] Kleinrock,L: Communication Nets: Stochastic Message Flow and Delay. McGraw-Hill,1964; Dover Publ. 1972

[K2] Kobayashi,Hisashi: Application of the diffusion approximation to queueing networks 1: Equilibrium queue distributions. J. of the ACM 21 /1974/,2, 316-28 o.

[K3] u.a. 2: Nonequilibrium distributions and applications to computer modeling. J.of the ACM 21,3 /1974/ 459-69 o.

[K4] Karp,R.M: Reducibility among combinatorial problems. [M4]-ben 85-1o3 old.

[K5] Karp,R.M: On the computational complexity of combinatorial problems. Networks 5 /1975/ 45-68 o.

[K6] Knapp,E.O: Solution of the n-Job m-Machine Scheduling Problem with Intraservice Queue Constraints. M.S. Thesis, Dptmt. of Eng. Syst. Univ. of Calif., 1969

[K7] Kleinrock,L.,Muntz,R.R: Multilevel processor-sharing queueing models for time-shared systems. Proc. 6th Int. Teletraffic Congr. 197o, 341/1-341/8 o.

[K8] Khintchine,A: Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendung auf die Theorie der diophantischen Approximationen. Math. Annalen 92 /1924/ 115-25 o.

[K9] Hincsin,A.Ja: Cepnüe drobi. Moszkva 1935, 1942;
Khintchin,A: Continued Fractions. Groningen 1963; Univ. of Chicago Press 1964
Khintchine,A: Kettenbüche. Leipzig, 1956

[K1o] Knuth,D.E: The Art of Computer Programming. Vol. 1: Fundamental Algorithms. Addison-Wesley 1968

[K11] Kupiers,L.,Niederreiter,H: Uniform Distribution of Sequences. Wiley, 1974

[L1] Labetoulle,J: Some theorems on real time scheduling. Gelenbe,E.,Mahl,R./ed./: Computer Architectures and Networks. Modelling and Evaluation. IRIA Workshop 1974, North-Holland, 1974, 285-98 old.

[L2] Liu,C.L.,Layland,J.W: Scheduling algorithms for multiprogramming in a hard real-time environment. J. of the ACM 2o,1 /1973/ 46-61 o.

[L3] Lewis,P.A.W.,Shedler,G.S: A cyclic-queue model of system overhead in multiprogrammed computer systems. J. of the ACM 18,2 /1971/ 199-22o o.

[M1] Muth,J.F.,Thompson,G.L: Industrial Scheduling. Prentice-Hall, 1963

[M2] McKinney,J.M: A survey of analitical time-sharing models. ACM Computer Surveys 1,2 /June 1969/ 1o5-16 o.

[M3] Mahl,R: An Analytical Approach to Computer Systems Scheduling. Ph.D. dissert. Dept.of Electr. Eng. Univ. of Utah, 197o

[M4] Miller,R.E.,Thatcher,J.W./Ed./: Complexity of Computer Computation. Plenum Press, New York, 1972

[M5] Manne,A.S: On the job-shop scheduling problem. Oper. Res. 8,2 /196o/ 219-23 o.; [M1]-ben 187-92 o.

[M6] Mitten,L.G: Sequencing n jobs on two machines with arbitrary time lags. Man. Sci. 5,3 /Apr. 1959/ 293-8 o.

[M7] Muntz,R.R.,Coffman,E.G.Jr: Preemtive scheduling of real time tasks on multiprocessor systems. J. of the ACM 17,2 /197o/ 324-38 o.

[M8] Moore,III C.G: Network Models for Large-Scale Time-Sharing Systems. Tech. Rep. 71-1, ISDOS Res. Proj. Depm. of Ind. Eng., Univ. of Michigan, 1971

[M9] Maekawa,M: Queueing models for computer systems connected by a communication line. J. of the ACM 24,4/1977/ 566-82 o.

[P1] Proc. of Computer Science Conf. Székesfehérvár, Hungary, 1973

[P2] Parmelee,R.P.,Peterson,T.I.,Tillman,C.C.,Hatfild,D.J: Virtual storage and virtual machine concepts. IBM Syst. J. 11,2 /1972/ 118-3o o.

[P3] Perron,Oskar: Irrationalzahlen. Berlin, Leipzig, 1921

[P4] Perron,Oskar: Die Lehre von den Kettenbrüchen. 1. Bd.: Elementare Kettenbrüche. Teubner, Stuttgart, 1954

[R1] Rényi Alfréd: On some problems concerning Poisson processes. Publ. Mathematicae, Debrecen, 2 /1951/,66-73

[S1] Spirn,J.R: Program Behavior: Models and Measurements. Elsevier, 1977

[S2] Specker,E: Seminar über die Komplexität von Entscheidungsproblemen. Springer, 1976

[S3] Sisson,R.L: Methods on sequencing in job shops. A review. Oper.Res. 7,1 /1959/ 1o-29 o.

[S4] Sasieni,M. stb.: Operations Research Methods and Problems. Wiley, 1959

[S5] Serlin,O: CPU scheduling in a time critical environment. ACM Operating Systems Review, 197o

[S6] Serlin,O: Scheduling of time critical processes. SJCC AFIPS Conf. Proc. Vol. 4o, 1972, 925-32 o.

[S7] Soh,J.W: Scheduling Strategies for Periodic Jobs in a Multiprocessor Environment. Ph.D. dissert. Northwestern Univ. Evanston, 1974

[Sz1] Szüsz Péter: Über die metrische Theorie der Diophantischen Approximation. Akad. Kiadó, Budapest, 1958

[T1] Traub,J.F./Ed./: Algorithms and Complexity. New Directions and Recent Results. Proc. of Conf. on. Academic Press, 1976

[T2] Takács Lajos: On secondary processes generated by a Poisson process and their applications in physics. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 5 /1954/ 2o3-36 o.

[T3] Takács Lajos: On secondary stochastic processes generated by recurrent processes. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7 /1956/ 17-29 o.

[T4] Takács Lajos: Occurence and coincidence phenomena in case of happenings with arbitrary distribution law of duration. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 2 /1951/, 275-98 o.

[T5] Takács Lajos: On processes of happenings generated by means of a Poisson process. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 6 /1955/ 81-99 o.

[T6] Tomkó József: Processor utilization study. Comp. et Math. with Appl. 1., Pergamon Press, 1975, 337-44 o.

[U1] Ullman,J.D: NP-complete scheduling problems. J. of Comp. Syst. Sci. 1o /1975/ 384-93 o.

[U2] Ullman,J.D: Complexity of sequencing problems. [C3]-ban 139-64 o.

[W1] Watson,R: Timesharing System Design Concepts. McGraw-Hill, 197o

[W2] Wismer,D.A: Solution of the flow shop scheduling problem with no intermediate queues. Oper. Res. 2o, 3 /1972/ 689-97 o.

[W3] Weyl,H: Gesammelte Abhandlungen, Band 1. Springer, 1968

[Y1] Yourdon,E: Design of On-Line Computer Systems. Prentice-Hall, 1972

Tartalom

Bevezetés

Az utóbbi évtizedekben egy uj önálló diszciplina fejlődött ki: az ütemezés elmélete /scheduling theory/. Ezt az automatizálás és a számitástechnika fejlődése eredményezte. Az automatizálás és a számitástechnika alkalmazása megkivánja erőforrások és igények tervszerü időbeni összerendelését, vagyis ütemezést. A rendszertervezésnek ez nagyon gyakran egyik fő aspektusa. Másrészt az automatika és a számitógép eszközt is biztosit bonyolult és hatékony ütemezések kivitelezésére.

Az ütemezési problémák tárgyalása egyre gyakrabban önálló cikkek, sőt könyvek témája és ma már jelentős irodalma van. A gyakorlatban ütemezési feladat mindig rendszerek müködésének részeként merül fel, ezért gyakran egyéb témák részeként kerül tárgyalásra.

A különféle ütemezési problémák jellege és megoldási eszközei annyira különbözők, hogy olyan egységes modell és módszer, amely az ütemezési problémák teljes körét felölelné, nincsen. A legbehatóbban tanulmányozott ütemezési probléma-tipust a véges diszkrét determinisztikus igény-együttes /task-ok/ jellemzi. Az irodalma is ennek a tipusnak a legbővebb. Az ütemezési problémák némi rendszerezését és irodalmi áttekintését az 1. fejezetben fogjuk elvégezni.

A jelen tanulmányunk témája az ütemezési elmélet egy speciális része: szabályos job-folyam párok ütemezése. Az ütemezési feladat jellegzetessége, hogy megszámlálhatóan végtelen /ciklikusan visszatérő/ igények jellemzik, amelyek nagysága állandó. A kiszolgáló apparátus processzor, amelynek kihasználását kell maximalizálni. A tárgyalt eset a lehető legegyszerübb, azonban messze nem triviális.

Már ez a modell is sok valóságos rendszerben alkalmazható és megoldása olyan eredményeket és módszereket szolgáltat, amelyek további kutatás révén bonyolultabb esetek megoldásához is hozzásegithetnek.

Az általunk tárgyalt ütemezési problémát röviden a következőképpen fogalmazhatjuk meg: Adva van a $\mathcal{P} = (P_A, P_{B1}, P_{B2})$ processzor-hármas. Ezt /a processzorok idejét/ kell ugy ütemezni, hogy egy $Q = (Q^{(1)}, Q^{(2)})$ job-folyam párat kiszolgáljon. A $Q^{(i)}$ job-folyam $C_{ij} = (A_{ij}, B_{ij})$ task párok sorozata, amelynél az A_{ij} task-ok /j=1,2,.../ a P_A processzortól kivánnak τ_i^A nagyságu kiszolgálást, a B_{ij} task-ok pedig a P_{Bi} processzortól igényelnek τ_i^B nagyságu kiszolgálást. A B_{ij} task-ok reprezentálhatnak τ_i^B ideju közöket is az egymás utáni A_{ij} task-ok rendelkezésre állása között. A B_{ij} task kiszolgálása nem kezdődhet meg, amig az A_{ij} task kiszolgálása be nem fejeződött, és az $A_{i,j+1}$ task kiszolgálása nem kezdhető meg, amig a B_{ij} task kiszolgálása nincs befejezve. Vagyis a task-ok szigoruan az $A_{i1} \to B_{i1} \to A_{i2} \to B_{i2} \to \ldots$ sorrendben szolgálandók ki. E feltétel következtében a P_{Bi} processzorokon kiszolgálási konfliktus nem lép fel, a P_A processzoron azonban felléphet az igények ütközése. A konfliktusokat az ütemezéssel oldjuk fel. Az ütemezés optimalizálását a P_A processzor kihasználásának maximálása jelenti. Egy X task kiszolgálása a megfelelő processzoron történhet összefüggően, vagy megszakitásokkal. Az összefüggő kiszolgálás egy járulékos feltétel lehet az optimalizálásnál. Sem az összefüggő, sem a megszakitásos ütemezés feladata nem triviális és látni fogjuk, hogy az optimalizálás kérdését nem is sikerül teljes mértékben megoldanunk.

A job-folyam párok ütemezési problémájának jellegzetessége, hogy az igény oldal megszámlálhatóan végtelen, diszkrét és determinisztikus.

Tudomásunk szerint ezt a feladatot eddig nem vizsgálták, legalábbis eredményeket nem publikáltak. Analóg feladatot sztochasztikus esetben Arató [A4] és Tomkó [T6] tárgyaltak.

Egyszerüsége ellenére a szabályos job-folyam számos gyakorlati esetben megfelelő modell lehet az ütemezési problémák vizsgálatához. Bizonyos programok /job-ok/ a számitógépen rendszeres időközönként kérnek azonos időtartamu kiszolgálást a CPU-tól. A távállomás közelitőleg azonos időközönként /gondolkodási és gépelési idő/ meghatározott ténykedést /transaction/ igényel a központi számitógéptől. Számitógép-hálózat müködtetésénél rendszeres időközönként vezérlő és ellenőrző információt kell generálni és küldeni a csomópontokra, amelyek feldolgozása azonos időt igényel. Egyéb rendszerekben is gyakori, hogy bizonyos folyamatok rendszeres időközönként azonos idejü ellenőrzést-beállitást kivánnak és annak elmaradása a folyamat lefolyását késlelteti.

A szabályos job-folyam párok ütemezésének tárgyalásában feltárt nehézségek sejteni engedik bizonyos más, kevésbé speciális modellek tárgyalésának a nehézségeit és azokat a nehézségeket, amelyek több job-folyam ütemezésénél merülhetnek fel. Az általunk alkalmazott modszerek és azok továbbfejlesztései alkalmasak lehetnek egyéb feladatok vizsgálatára is. Az általunk feltárt törvényszerüségek orientálhatnak egyéb feladatokkal kapcsolatos kutatásokban is. A szabályos job-folyam párok ütemezéseinek /ütemterveinek/ vizsgálatára kifejlesztett $\mathfrak{D}$-redukciós és Δ-redukciós módszereink más jellegü, nem ütemezési feladatok, problémák vizsgálatára is alkalmasak lehetnek.

Ezt a koincidencia és közelitési feladatok és az ütemezési feladat kapcsolata támasztja alá. Ezzel később majd foglalkozunk. Mindkét redukciós eljárás a szabályos lánctörtfejtés euklideszi algoritmusának általánositásaként tekinthető, amelyet részletesebben is kifejtünk majd.

A tanulmányunk öt fejezetre tagozódik. Az első fejezet a téma környezetét és az ütemezési problémák irodalmát tekinti át. Lényegében bevezető jellegü. A második fejezet előkészitő jellegü, amelyben megfogalmazzuk az ütemezési problémákkal rokon koincidencia feladat fogalmát és áttekintjük azokat a megoldási módokat, amelyekre az ütemezési feladataink egy részét majd vissza fogjuk vezetni. A módszerek a szabályos lánctörtfejtésen alapulnak, ezért ennek technikáját és főbb összefüggéseit is felidézzük. Tesszük ezt még azért is, mert az ütemezési feladataink megoldásában ennek általánositásaira van szükségünk.

A harmadik, negyedik és ötödik fejezetekben foglalkozunk a szorosan vett témánkkal, a szabályos job-folyam párok ütemezésével. A harmadik fejezet a probléma definiciója, a később szükséges fogalmak bevezetése mellett általában tárgyalja a szabályos job-folyam párok ütemezését és ütemterveinek tulajdonságait. A fejezet fő eredménye a megengedhető ütemtervek terének lényeges szükitése a dominancia elv alapján, hogy az optimális ütemezést minél szükebb osztályban kereshessük.

Az ütemtervek fontos részosztálya az összefüggő ütemtervek, amelyeket a negyedik fejezetben tárgyalunk részletesen. A harmadik fejezet eredményei szerint elegendő egy igen szük ütemterv osztályra szoritkoznunk, amelynek dominanciáját kimutatjuk. Az ütemtervek vizsgálata és hatékonyságuk meghatározása két alternativ módszerrel lehetséges. Az egyik módszer bizonyos egyenlőtlenségek legkisebb pozitiv egész megoldását /koincidencia feladat megoldását/ jelenti. A másik módszer a szabályos lánctörtfejtés általánositásának tekinthető $\mathfrak{D}$-redukció. Ezt definiáljuk, részletesen elemezzük és segitségével kritériumokat adunk az összefüggő optimális ütemezési stratégia kiválasztására, algoritmust annak végrehajtására és becsléseket az algoritmus számitásigényére. Elemezzük a lánctörtfejtés és a $\mathfrak{D}$-redukció analógiáját és különbségeit.

Az ötödik fejezetben a prioritásos /megszakitásos/ ütemezéseket vizsgáljuk. A prioritásos ütemezések dominanciáját azonban nem tudjuk bizonyitani. Ettől függetlenül a prioritásos ütemezések a gyakorlatban fontosak és gyakran használják. Sztochasztikus esetben is ezeket vizsgálták /[A4],[T6]/. A fejezetben módszert adunk az ütemtervek hatékonyságának meghatározására. A legtöbb esetre garantáltan véges algoritmust tudunk adni, bizonyos esetekre azonban csak közelitő módszert adunk. Alapvető vizsgálati módszerünk a lánctörtfejtés egy másik általánositásán alapszik, amelyet Δ-redukcióként definiálunk. Megmutatjuk a Δ-redukció és az előző fejezetben használt $\mathfrak{D}$-redukció kapcsolatát is.

1. Az ütemezési problémákról általában.

Ebben a bevezető jellegü fejezetben témánk környezetét és irodalmi hátterét tekintjük át. Először általános definiciót adunk az ütemezési problémára és az ütemezés fogalmára, majd áttekintjük az ütemezési problémákban általában közös komponenseket, modellelemeket. Ezután az ütemezési problémák komplexitásával foglalkozunk, majd bemutatunk néhány olyan ütemezési problémakört, amely valamilyen vonatkozásban hasonlit az általunk vizsgált ütemezési problémára, ha vizsgálati módszereit és eredményeit tekintve teljesen eltér is attól. A tekintett problémák két nagy problémakör részei, a job-shop ütemezésé, illetve az idő-kritikus folyamatok ütemezéséé.

Végül a job-folyamok ütemezésével kapcsolatban utalunk az általunk vizsgált modelltől eltérő ütemezési modellekre. Ezek közül néhány eredményt emlitünk meg, amelyeket sztochasztikus esetben más kutatók kaptak.

Az 1.1. pont az ütemezési probléma felmerülésének körülményeivel, a kapcsolódó tématerületekkel és az ütemezési problémák osztályozásával foglalkozik. Az 1.2. pontban az ütemezési problémák modell-komponenseit tekintjük át. Az 1.3. pont a komplexitás kérdésével foglalkozik. Az 1.4. pontban job-shop tipusú problémákat, az 1.5. pontban pedig idő-kritikus ütemezési problémákat tárgyalunk. Végül az 1.6. pontban a szabályos job-folyam párok ütemezési problémájának legszükebb környezetét, a job-folyamok ütemezését általában vizsgáljuk meg.

1.1. Az ütemezési probléma fogalma.

Az ütemezési probléma preciz definiciója csak konkrét feladatokkal kapcsolatban, matematikai modellek keretében adható meg. Erre majd a 3. Fejezetben a job-folyam párok ütemezési problémája esetében sor kerül. Általánosan az ütemezési probléma egy ütemezési feladat végrehajtási módjának meghatározását jelenti.

Ütemezési feladattal akkor állunk szemben, amikor meghatározott igényeket kell erőforrások segitségével kielégiteni. Az igények csak a kielégitéssel szünnek meg /nem vesznek, "évülnek" el/ és az erőforrások nem fogynak el csak a kiszolgálás idejére kötődnek le. Az ütemezési probléma ilyen ütemezési feladat megoldása különféle feltételek mellett. Az erőforrások és igények időbeni egymáshoz rendelése kielégités céljából; az ütemezés.

Baker [B1] szerint az ütemezés /scheduling/ * erőforrások /resources/ kiosztása /allocation/ az időben meghatározott feladatok /tasks/ elvégzésére. Ez a definició érthetővé teszi az ütemezési elmélet fejlődésének alakulását. Ezzel kapcsolatban két dolgot emelhetünk ki. Egyrészt azt, hogy az ütemezés problémája egyidős a termelés és szolgáltatás szervezésének problémájával, másrészt azt, hogy az ütemezési problémák jelentősége az utóbbi évtizedekben megnövekedett.

Az ipari, technologiai folyamatok szervezésében [M1], a termelés, szolgáltatás, szállitás, hirközlés, hadászat, stb. szférákban mindig alapvető kérdés erőforrások elosztása, ütemezése.

---

* Számos fogalomnak nincs még egységes magyar neve, ezért első használatkor az angol megfelelőjét is közlöm.

Ezeken a területeken azonban az operációkutatási, kombinatorikai /gráfelméleti/, kiszolgáláselméleti és egyéb matematikai /pl. sztochasztikus folyamatok/ módszerek hagyományosak([A1] , [D1] , [C1] , [F1]). Ezért érthető, hogy az ütemezés elméletében a matematikai programozási, kombinatorikai, sztochasztikus folyamatok elméletebeli módszerek nagy szerepet játszanak és számos ütemezési probléma az emlitett kutatási területek keretében már megoldott.

Az automatizálás és számitástechnika fejlődésével és térhóditásával azonban az ütemezési problémák jelentősége az utóbbi évtizedekben nagy mértékben megnövekedett. A legfontosabb okai ennek a következők.

Az automatizálás megkivánja az ütemezési problémák elemzését és megoldását, sőt az ütemezés algoritmizálását.

A számitógép maga egy kiszolgáló, erőforrás rendszer, amely maga is ütemezést kiván. Itt olyan ütemezési problémák is előtérbe kerültek, amelyek korábban figyelmen kivül maradtak, vagy nem is léteztek. A számitástechnika, a számitógép főként a véges determinisztikus problémák jelentőségét növelte meg, ezen belül is kombinatorikus problémák jelentőségét.

A számitógép az automatika részeként, vagy segédeszközként a termelés, szolgáltatás, információfeldolgozás, a tudomány, a közigazgatás és az élet majdnem minden területén alkalmazásra kerül és megkivánja olyan folyamatok algoritmizálását is, amelyeket korábban ad hoc döntésekkel irányitottunk, igy ütemezési döntéseket is. A számitógép mint eszköz jelentősen elősegiti az ütemezési elmélet fejlődését azáltal is, hogy megvalósithatóvá tesz olyan ütemezési algoritmusokat is, amelyek nélküle számitás- és döntésigényük nagysága miatt megvalósithatatlanok lennének.

Ugyanakkor azonban a számitógépnek, mint igen értékes és termelékeny erőforrásnak az ütemezése előtérbe helyezi az ütemezés gazdaságosságának, hatékonyságának jelentőségét. Kis hatékonyság javitás mellőzése jelentős veszteséget jelenthet. A hatékony ütemezés viszont feltételezi az ütemezési probléma elemzését, exakt vizsgálatát és legkedvezőbb ütemezési stratégia meghatározását, vagy legalább a ténylegesen alkalmazott stratégia hatékonyságának becslését különböző feltételek között.

Az egyik oldalról tehát az automatizálás és számitástechnika mint igény megkövetelték, a másik oldalról az automatika és számitógép, mint eszköz elősegitették az ütemezési elmélet fejlődését. Valójában az ütemezési elmélet /scheduling theory/ az utóbbi egy-két évtizedben kezd önállóan körvonalazódni elsősorban a számitástudomány részeként. Számos tudományos konferencia és könyv önálló, vagy fontos résztémája az ütemezés ([E1], [I1], [P1], [C2], [B1], [C3] stb.). Az ütemezési algoritmusok rendszerint a rugalmasabb software eszközökkel kerülnek realizálásra; igy érthető, hogy az ütemezési probléma elsősorban az operációs rendszerek elméletében ([B2], [C4], [C5], [H1], stb.) foglal el központi helyet. Ugyanakkor ütemezési probléma igények "versengése" esetén merül fel, igy érthetően a multiprogramozási, a multiprocesszoros és időosztásos /time sharing/ rendszerekben és számitógéphálózatokban kerül előtérbe ([Y1], [W1], [A2], [K1], [M2] stb.).

Az áttekintő, összefoglaló jellegü könyvek közül kiemelhetjük Muth-Thompson ipari ütemezéssel foglalkozó könyvét [M1], Conway-Maxwell-Miller alapvető könyvét [C2] az ütemezési elméletben és elsősorban determinisztikus ütemezési problémákkal kapcsolatban Baker könyvét [B1] és legujabban /1976/ egy Coffman szerkesztette monográfiát [C3].

Az utóbbi könyvben hat fejezetben E.G.Coffman, Jr., R.Sethi, J.L.Bruno, J.D.Ullman, R.L.Graham, W.H. Kohler-K. Steiglitz, témakörük neves kutatói összefoglalják a véges determinisztikus ütemezési problémákban elért eredményeket és kutatási irányokat. Az ütemezési problémák jelentős témaként szerepelnek az operációs rendszerekkel kapcsolatosan Colin magyarul is megjelent könyvében [C4] , valamint Barron [B2] , Brinch-Hansen [B3] és Coffman-Denning [C5] könyveiben, az adatfeldolgozó, időosztásos számitógépekkel kapcsolatosan Yourdon [Y1], és a számitógéphálózatokkal kapcsolatosan Abramson-Kuo szerkesztette könyvben [A2] . Ezeket azonban inkább példaként tekinthetjük sok egyéb jelentős könyv és cikk mellett.

Az ütemezési probléma mindig valamilyen rendszer müködésének keretében, annak részeként merül fel. A rendszer elemei képezik a környezetet és szabják meg az ütemezés feltételeit és kritériumait. Az ütemezési problémában rendszerint már adottak olyan elemek, amelyek a rendszer tervezésekor még tervezési változók, azonban az ütemezési probléma sajátosságai befolyásolhatják az egész rendszer tervezését. Az ütemezési problémák célszerü megközelitési módja is ezért legtöbbször a rendszer jellegü megközelités. Ennek tipikus mozzanatai az azonositás és a célok kitüzése /definició/, az elemek, komponensek meghatározása és összefüggéseik elemzése /analizis/, a különféle megoldási lehetőségek, alternativák vizsgálata /szintézis/ és végül a legjobb, vagy legcélszerübb megoldás kiválasztása /értékelés/ [B1] .

Az ütemezésnek két tartalma és két fázisa van: elmélet és tevékenység. Az ütemezés mint elmélet az ütemezési probléma exakt tárgyalása és megoldása és tágabb értelemben: az ütemezési elmélet modellek, módszerek, eredmények gyüjteménye. Ez az elmélet a problémák sokrétüsége miatt korántsem egységes. Az ütemezési elmélet képezi az ütemezésnek, mint tevékenységnek az elvi megalapozását. Az ütemezési elmélet a rendszer-tervezés része, az ütemezési tevékenység a rendszer-müködés része. Az ütemezési probléma elméleti megoldása egy ütemezési stratégia, amely biztositja azt, hogy a stratégia előirta szabály szerint végzett ütemezés a rendszertervben kitüzött céloknak és feltételeknek megfelelően történik, minden megengedhető körülmények között. Az elméleti megoldás általában egy elvont modellen alapul, amelynek valóság-hüsége természetesen a stratégia valóságos hatékonyságát döntően befolyásolhatja. Az ütemezési stratégia azonban a problémának elvi megoldása és a gyakorlati megoldást egy olyan ütemezési algoritmus jelenti, amely a stratégiának megfelelő ütemezést eredményez, ha azt konkrét esetekben végrehajtjuk. Az ütemezési algoritmus egy döntési eljárás, egy előirás arra, hogy az ütemezést miként hajtsuk végre. Vagyis mindig konstruktiv. Az ütemezési algoritmus mindig két fázisra bontható. Egy előkészitő fázisban az ütemezés megkezdése előtt rendelkezésre álló /input/ adatok felhasználásával elvégzi azokat a döntéseket, amelyek az adott realizáció /input adatok/ mellett a második fázis "behangolását" jelenti. Ez a fázis lehet teljesen lényegtelen, de lehet egy teljes ütemterv elkészitése is, amely már minden pillanatra előirja, hogy melyik erőforrás melyik igény kiszolgálását végzi.

Az utóbbi esetben a második fázis tulajdonképpen már a kiszolgálás végrehajtása az ütemterv szerint és nem igényel semmiféle döntést. Determinisztikus véges esetben ez tipikus. Sztochasztikus esetben, vagy amikor az igények előre nem ismertek, akkor az ütemezési tevékenység második fázisa jelentős és a tényleges igényeknek megfelelően folyamatosan dönt az erőforrások és igények egymáshoz rendeléséről. Az előkészitő fázisban e döntések "eszközeit" készitjük elő. Az ismeretlen adatokra vonatkozóan különféle becsléseket használhatunk fel. A két fázis különbsége világossá válik néhány tipikus ütemezési technika bemutatásával.

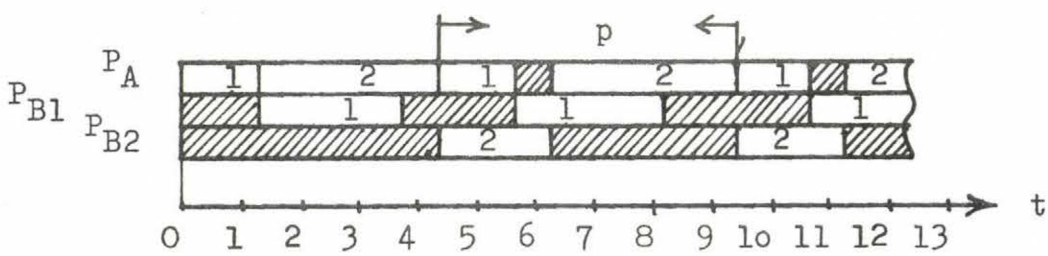
Tipikus ütemezési technika a <u>lista szerinti ütemezés</u> [C3] determinisztikus esetben. Ennek lényege az igények sorba rendezése és egy szabad kapacitáshoz mindig a sorban legelső még ki nem elégitett, de ütemezhető igényt rendeljük hozzá. Ilyenkor az ütemezési döntést csak akkor kell meghozni, amikor az ütemezés /egymáshoz rendelés/ ténylegesen végre is hajtható /a kiszolgálás elvégezhető/. Ezt gyakran <u>diszpécserezésnek</u> /dispatching/ nevezik [B1]. Az ütemezés kezdeményezése az erőforrás oldalról indul ki. A diszpécserezésnél a rendszer pillanatnyi állapotának egyéb jellemzői is figyelembe vehetők, ilyenkor a diszpécsrezés <u>dinamikus</u>. A lista szerinti ütemezés speciális esete a prioritás szerinti /priority driven/ ütemezésnek, amelynél az igények, vagy azok csoportjai rendelkeznek egy mérőszámmal, amelyet <u>prioritásnak</u> nevezünk és minden szabad kapacitáshoz mindig a legmagasabb prioritású ütemezhető igényt rendeljük hozzá. Ha a prioritások pozitiv egészek, megfeleltethetők egy listabeli helyet kijelölő sorszámnak és a prioritás ekvivalens a listába állitással. A prioritása a kiszolgálás elött álló igényeknek a kiszolgálás alatt lehet állandó, vagy változhat is.

A statikus prioritást gyakran osztálynak nevezzük. Dinamikus prioritás megfelel olyan listának, amelyben a sorrend változhat, bár ez nem tipikus lista szerinti ütemezés. A prioritás szerinti ütemezésnél az ütemezést gyakran az igény oldal kezdeményezi: amikor egy igény ütemezésre késszé válik ütemezésének lehetősége mindig vizsgálatra kerül. Megszakitó /preemptive/ prioritás esetén egy igény akkor is ütemezendő, ha számára alacsonyabb prioritású igény kiszolgálásának felfüggesztésével biztositható erőforrás. A felfüggesztett igény kiszolgálása a megszakitó igény kiszolgálása után ismét elkezdődik /preempt-repeat/, vagy folytatódik /preempt-resume/ a probléma sajátosságának megfelelően. Prioritásos ütemezésnél az ütemezési döntés kezdeményezése történhet az erőforrás oldalról is, amikor egy igény kiszolgálása befejeződik és az erőforrás felszabadul. Ha kiszolgálás megszakitása nem megengedett akkor összefüggő /non-preemptive/ ütemezésről beszélünk.

A megszakitásos ütemezés másik tipikus esete a megszakitó prioritáson kivül az időszeletelés /time-slicing/, amelynél rendszeres időközökben ütemezési döntést hozunk és valamilyen szabály szerint változtatunk az ütemezésen /hozzárendelésen/. Az ütemezési döntést vezérelheti prioritás, vagy más szabály /pl. round-robin/. Egy processzoros esetben a multiprogramozás megvalósitásának ez egy tipikus módja. A processzor idejét megosztja a különböző várakozó igények között /time sharing/ ezért időosztásos ütemezésnek is nevezik.

Egy ütemezést a probléma jellegétől függően különféleképpen szemléltethetünk. Bizonyos esetekben csupán a tényleges ütemezési folyamat utólagos ábrázolása lehetséges /nem determinisztikus eset/, vagy hipotetikus realizáció ütemezését ábrázolhatjuk.

Ilyenkor a teljesen ismert igények és erőforrások egymáshoz rendelését az időben különféle diagramokon is ábrázolhatjuk. Determinisztikus esetben az ütemezés a megoldás által egyértelmüen meghatározott /kivéve esetleges randomizációt, amikor sztochasztikus esetként kezelendő/ és még az ütemezési tevékenység előtt, mint ütemezési terv, vizsgálható és ábrázolható. Ezt nevezzük ütemtervnek. Az ütemezést /ütemtervet/ különféle gráfok segitségével ábrázolhatjuk, amelyek csúcsai általában az igények, élei pedig kiszolgálási sorrendet jeleznek /irányitott élek!/ és különféle egyéb adatokkal kótázhatók. Amikor az erőforrások kizárólag processzorok, vagy elsősorban azok ütemezését kivánjuk ábrázolni, akkor a processzoroknak egy-egy párhuzamos időtengelyt feleltetünk meg, amelyeken foglaltsági szakaszaikat - általában a kiszolgált igény azonositójával kótázva - megjelöljük. A megjelölés leginkább egységnyi magasságu téglalap a foglaltsági intervallum felett, amelybe az azonositókat irjuk. A processzor tétlen szakaszait megkülönböztetően jelöljük /pl. sraffozással/. Az ilyen jellegü ábrázolást szokás Gantt-/féle/ diagramnak nevezni [B1], [Clo]. Az 1.1. Ábra az általunk használt Gantt-diagram formát szemlélteti.



1.1.Ábra: Gantt-diagram.

Ezen minden processzornak egy vizszintes sáv felel meg, amelyen a világos mezők a benne jelzett job, vagy jobfolyam első, második, stb. kiszolgálási időszakát jelképezik. A mező hossza méri az időintervallum hosszát. A processzorok tétlen szakaszait vonalkázással jelezzük. Az időskálát az időosztással együtt általában nem jelezzük, mivel az időegységnek és az abszolut időpontnak nincs jelentősége, csupán az események relativ ideje fontos. A sávok és processzorok megfeleltetése a későbbiekben mindig azonos lesz, ezért jelzését mellőzzük.

1.2. Az ütemezési probléma komponensei.

Az előző pontban emlitettük, hogy egy ütemezési probléma tipikus rendszer-megközelitésének első lépése a probléma definiálása, majd az elemek, komponensek és kapcsolataik meghatározása /analizis/. Ebben a pontban áttekintjük egy ütemezési probléma tipikus elemeit, amelyek jellegzetessége döntő a probléma modellezésében. Az ütemezési tevékenység pillanatában a rendszer két legfontosabb oldala az erőforrás és az igény egyaránt meghatározottak, sőt meghatározott azok állapota is. Az erőforrás állapotán annak lekötöttségi mértékét, az igény állapotán annak kiszolgáltsági fokát értjük. Az erőforrás oldal azonban rendszerint már az ütemezés előtt teljesen meghatározott, legalábbis a készletek nagysága és minősége. Az igény oldal determinisztikus esetben az ütemezés előtt meghatározott, sztochasztikus esetben azonban nem feltétlenül /az igények nem egyszerre realizálódnak, érkeznek, hanem az ütemezéstől független, vagy függő időpontokban/.

Egy ütemezési probléma általában nem egyszeri, teljesen egyedi eseménnyel vagy folyamattal kapcsolatban merül fel, hanem egy rendszer müködésében ismétlődő folyamattal kapcsolatban. A probléma modellje nem egyetlen meghatározott esetet jelképez, hanem problémák egy osztályát, amelyben változók képviselik a valóságos lehetőségek változatait. E változók egy-egy konkrét értékét nevezzük realizációnak, ez a modell inputja és ez egy meghatározott valóságos helyzetet jelképez. A modellnek ezenkivül vannak paraméterei, amelyek rendszerről-rendszerre változhatnak de egy rendszerben ismétlődő ütemezési feladatoknál azonosak.

Az ütemezési problémáknak általában az alábbi négy fő komponensét különböztethetjük meg:

erőforrás-rendszer

igény-rendszer

feltétel-rendszer

hatékonysági szempontok.

Vegyük sorra ezeket.

Az erőforrás-rendszer általában processzorokat és egyéb erőforrásokat tartalmazhat. A processzor olyan erőforrás, amely nem osztható, csak egészként vehető igénybe, köthető le meghatározott időre. Ennek megfelelően két állapota van: a szabad és a foglalt /tétlen ill. aktiv/. A processzorok között kétféle különbség lehet. Minőségi /milyen tipusu igény kielégitésére való, milyen tevékenységet végez/ és sebességbeli. Az utóbbi az egységnyi idő alatt kielégithető igény nagyságát jelenti. Csak azonos tipusú processzoroknál van jelentősége, vagy akkor, ha az igények nem processzorteljesitményben vannak kifejezve [G1] .

Egyéb erőforrás az olyan, amelynek kapacitása egyidejüleg több igény között megosztható. Az egyéb erőforrás jellemzője a kapacitás, amelynek kiosztott része a lekötött, a ki nem osztott része a szabad kapacitás egy adott pillanatban és ezt tekintjük az állapot jellemzőjének. Különös egyéb erőforrásnak tekinthető az osztott processzor, amely egyidejüleg több processzor-igényt ki tud elégiteni osztott teljesitménnyel /sebességgel/. Ekkor egy adott processzor-igény kielégitésének időtartama forditva arányos a juttatott processzor-kapacitás nagyságával. A processzor-igény mindig idő jellegü, az egyéb erőforrás-igény pedig volumen jellegü, amely rendszerint processzor-igénnyel együtt jelentkezik a kiszolgálás teljes tartamára. Az egyéb erőforrás kapacitás jellemzője lehet a rendezettség, amikor a kiosztásnál nemcsak a nagyság, hanem az erőforráskapacitás helye is érdekes lehet.

Egy számitógépnél tipikus processzor a központi egysége /CPU/ és tipikus egyéb erőforrás a központi memóriája. Egy igény /program/ számára a kiosztott memóriának nemcsak a nagysága, hanem a helye is lényeges lehet. Másik tipikus processzor egy adatátviteli csatorna és egyéb erőforrás a háttértár /pl.disk/. Az osztott processzorhoz hasonló egy olyan processzor, amely az igények nagyságához képest igen rövid időközökben váltogatja a kiszolgált igényt és az egyes igények között igy osztja meg a kapacitását /time sharing/. Ha t_o egy igen kis időegység /time slice/ és az i igény $\alpha_i t_o$ idejü kiszolgálása után a következő igények rendre t_o-al arányos idejü kiszolgálást kapnak, akkor az i igény részére a processzor $\alpha_i / \sum \alpha_j = c_i$ közepes sebességü kiszolgálást nyujt és $t_o \to o$ esetén müködése egy osztott processzoréval válik ekvivalenssé, amely az i igény rendelkezésre c_i kapacitást bocsát. Ezen a közelitésen alapulnak a multiprogramozású számitógépek ciklikus kiszolgálási modelljei is [M2] . Egy multiprogramozási rendszer vezérlésének része lehet t_o optimális megválasztása is, azonban egy ütemezési probléma számára t_o adott paraméter.

Az erőforrások sajátossága lehet még a legkisebb igénybevehető kvantuma /processzornál idő, egyéb erőforrásnál volumen/. Számitógép ütemezési problémáiban érthető a kapcsolat az egyéb erőforrások allokációs kérdéseivel /memory allocation/ amely külön kisérő problémája lehet az ütemezési problémának. A memoria részekre /lapokra/ bontásának módja [D2] , a virtuális memoria kezelése [P2], [B4], [D3] lényegében ütemezési problémákkal szorosan összefüggnek márcsak a döntési algoritmusok végrehajtási idejének /overhead/ összeadódása miatt is.

Közvetve az ütemezési probléma még a program-struktura, programviselkedés kérdésével [S1], [D4] , sőt a virtuális rendszerek programozási és programoptimalizálási kérdéseivel [B4], [A3] is összefügg. A modellekben, az elméleti megoldásokban ezek független kérdések lehetnek, azonban egy tényleges számitógépnél a modellek feltételeinek teljesülését kölcsönösen befolyásolják. Egy valóságos számitási rendszerben az ütemezési problémáknak is több szintje, sikja merülhet fel, amelyek többé-kevésbé önállóan kezelhetők és oldhatók meg, holott egymást befolyásolják. Különösen jellemző a több szintü ütemezés multiprogramozási /u.n. time sharing/ és multiprocesszáló rendszerekben és számitógép hálózatoknál [D5], [Y1], [A2], [K1] . A különféle szinteken ugyanaz az erőforrás fajta lehet egyszer processzor, máskor egyéb erőforrás.

Tipikus ütemezési problémákban az erőforráskészlet egy P processzor, vagy m azonos processzor $\mathcal{P}= \{P_1,\dots,P_m\}$ rendszere azonos, vagy $c_1,\dots,c_m$ sebességekkel, vagy különböző processzorok egy $\mathcal{P}= \{P_1,\dots,P_m\}$ rendszere /shop/. Az utóbbiak különböző tevékenységeket végeznek és esetleg mindegyik helyett azonos processzorok egy-egy készlete áll rendelkezésre. Egyéb erőforrás nincs, vagy egy van tipikus esetben.

Az <u>igény-rendszer</u> tipikus esetben diszkrét "igényhordozók" halmaza. Az igényhordozókat task-oknak, máskor job-oknak nevezik. A <u>task</u> jellemzője, hogy meghatározott idejü processzorigénye és esetleg meghatározott nagyságú egyéb erőforrásigényei vannak. Az egyéb erőforrásokat csupán a processzor-kiszolgálás idejére igényli. A task csupán egyetlen processzortól igényel kiszolgálást, amelynek nagysága általában nem függ a kiszolgálás módjától vagy a többi task igényeitől.

Az igények lehetnek determinisztikusak, vagy valószinüségi változók, érkezhetnek egyszerre a rendszerbe, vagy egymás után a kiszolgálástól független, vagy függő előre ismert, vagy ismeretlen, véletlen pillanatokban. A task-ok száma lehet véges, vagy végtelen. Az utóbbi esetben határeset, amikor kis igényü task-ok végtelen sorozatát folytonos sztochasztikus folyamattal közelitik, amint pl. ezt multiprogramozású számitógépek központi egységének terhelésénél gyakran teszik /L.pl. a diffuziós közelitéseket [G2], [G3], [K2], [K3], [A4] /. A task-ok között rendszerint bizonyos <u>előidejüségi</u> megszoritások, <u>relációk</u> állnak fenn. Ezek gyakran a task-ok bizonyos összefüggő csoportjait határozzák meg, amelyeket job-oknak neveznek. A job-ok között rendszerint már nincs előidejüségi megszoritás. A task-ok közötti előidejüségi relációk olyan jellegüek, hogy egyik task kiszolgálásának /végrehajtásának/ meg kell előznie a másik task kiszolgálását. Ha két task között ilyen előirás nincs, azokat függetleneknek mondjuk. Néha a task-ok között olyan összefüggés van, hogy bizonyos task-sorozatokon belül a kiszolgálás nem késleltethető /pl. egy meleg-megmunkálás sorozat egy vasmüben/. Egyik tipikus igény-rendszer a $Q=\{Q_i\ ,\ i=1,\ \dots,\ n\}$ véges task-készlet. A task-ok lehetnek függetlenek, vagy közöttük páronkénti $Q_i \prec Q_j$ előidejüségi relációk lehetnek előirva, amelyeket legegyszerübben egy gráffal ábrázolhatunk. Speciális gráf a fa, vagy erdő /fák halmaza/. Másik tipikus igény-rendszer a $Q=\{Q^{(i)}\ ,\ i=1,2,\dots,n\}$ job-készlet, amelyben $Q^{(i)}=\{Q_{ij},\ j=1,\dots,\ \nu_i\}$ job a Q_{ij} task-ok sorozata, amelyek növekvő j szerinti sorrendben hajtandók végre. Speciálisan $Q_{ij}\ ,\ j=1,2,\dots,\ \nu_i$ mindegyike másfajta processzoron igényel kiszolgálást. Minden $Q^{(i)}$ job task-jai ugyanazon $\mathcal{P}$ processzor készlet /shop/ processzorain igényelnek kiszolgálást valamilyen sorrendben, amelyet körbenjárásnak /routing/ neveznek: az u.n. job-shop problémához jutunk.

Ha a Q_{ij} task-ok váltakozva végtelen sokszor /$\nu_i = \infty$ / igénylik ugyanazt a $\mathbf{P}$ processzor-készletet, a job-folyam általános esetével állunk szemben. Tipikus a $Q^{(i)} = \{C_{ij}, j=1,2,\dots\}$, $C_{ij} = (A_{ij} \prec B_{ij})$ task-pár, ahol A_{ij} egy P_A és B_{ij} egy P_B tipusú processzoron igényel kiszolgálást. Az igények nagysága minden esetben lehet előre ismert determinisztikus /pl. azonos/, vagy valószinüségi változó.

A feltétel-rendszer azokat a kikötéseket tartalmazza, amelyeket az ütemezéskor nem lehet megsérteni. Ezek kötödhetnek közvetlenül az erőforrás-rendszerhez /pl. kvantálhatóság/, az igényrendszerhez /pl. az előidejüségi relációk/, de lehetnek egyéb kikötések is, amelyek az ütemezési probléma önálló komponensének tekinthetők. A tipikus feltételek az igényekhez kapcsolódnak elsősorban. Az előidejüségi relációk lehetnek speciálisan értelmezve; a végrehajtásra esedékességi idők /due date/ vagy határidők /deadline/ lehetnek előirva; a kiszolgálás befejezéséig költségek merülhetnek fel. Veszteségek lehetnek előirva az esedékességi időtől való eltérés, a határidő túllépés esetére.

Elő lehet irva, hogy egy task kiszolgálása nem szakitható meg /non-preemptive/, vagyis csak összefüggő ütemezés alkalmazható. Ez lehet az igény oldal sajátsága, vagy független előirás. Az igény oldal szabja meg, hogy megszakitás /preemption/ esetén a task kiszolgálását újra kell-e kezdeni /preempt-repeat/, vagy folytatható /preempt-resume/. Speciális feltétel-rendszert jelentenek az u.n. időkritikus folyamatok, időkritikus ütemezés, amely elsősorban folyamatirányitásnál léphet fel. Jellemzője az igények periodikus jelentkezése és megadott határidőn belüli kiszolgálás követelménye.

A feltétel-rendszer szabja meg azt, hogy egy ütemezés /ütemterv/ mikor megengedhető /feasible, végrehajtható/. Határidő esetén annak megsértése jelentheti az ütemterv megengedhetetlenségét, elfogadhatatlanságát és jelenthet előirt veszteséget csupán.

Az ütemezési probléma negyedik komponensét képezik a hatékonysági szempontok. Ezek a különféle problémákban tartalmukra és formájukra nézve igen különfélék lehetnek. Formájuk lehet egyetlen célfüggvény szélsőértékének elérése, elsődleges és másodlagos szempontok kielégitése, több ellentmondó szempont közelitő kielégitése. Az utóbbi eset rendszerint megalkuvás eredménye olyan esetben, amikor kiválasztott szempontok szerinti optimális megoldás nem létezik, vagy nem ismert, vagy végrehajthatatlan ütemezési algoritmust eredményez. A leggyakrabban használt célfüggvények, amelyeket értelemszerüen maximalizálni, vagy minimalizálni kell [C3], [B1], a következők:

ω ütemezési hossz /schedule length, makespan/ véges task-rendszer esetén az utolsó befejezésének pillanata; ez forditva arányos a processzorok kihasználtságával;

$\bar{f}$ átlagos feldolgozási idő /mean flow-time/, amely súlyozás nélkül az átlagos fordulási idő /turnaround time/; súlyozva a rendszerben tartózkodás költségeivel, arányos a rendszer ráforditásaival /inventory [B1] /;

$\bar{\delta}$ átlagos határidőcsúszás /lateness, az esedékességi idő és befejezési idő különbsége/, amely súlyozva lehet adott veszteségekkel;

$\bar{\Delta}$ átlagos késés /tardyness, a határidőtullépés, ha van/, amely súlyozva lehet adott veszteségekkel;

ΔN a késve /határidő után/ befejezett task-ok száma. Gyakori ezeknek a kritériumoknak a kombinálása elsődleges és másodlagos célfüggvény-párrá [C3], [B1] .

Ekkor az elsődleges célfüggvény szerint optimális ütemezések halmazán belül kell a másodlagos célfüggvény szerinti optimálisat meghatározni. Egy ütemezés egy célfüggvény szerint akkor optimális, ha a célfüggvény szélsőértéket vesz fel. Optimális az az ütemezési stratégia, amely minden inputra optimális ütemezést eredményez.

Legyen $\mathfrak{R}$ a megengedhető ütemezések tere és F/R/ a célfüggvény $R\in\mathfrak{R}$ ütemezésekre értelmezve. A cél legyen F extremalizálása /minimalizálása, vagy maximalizálása/. Az ütemezési probléma megoldása olyan $R^*\in\mathfrak{R}$ ütemezés meghatározása, amelyre

$$F/R^*/=\operatorname{ext}_{R\in\mathfrak{R}} F/R/ \qquad /\text{ext=min. vagy max.}/$$

Ekkor R^* egy optimális ütemezés. Az optimális stratégia minden realizáció mellett /minden inputra/ egy ilyen R^* ütemezést határoz meg. Legyen $\mathfrak{R}^*\subset\mathfrak{R}$ az optimális ütemezések részhalmaza. Ez lehet üres, állhat egy vagy több elemből. Az utóbbi esetben az optimális ütemezés nem egyértelmü. Ilyenkor van jelentősége másodlagos hatékonysági kritériumoknak. Sokszor optimális ütemezések biztosan léteznek, csak nem ismeretesek, más esetben optimális stratégia is létezik, azonban végrehajthatatlan nagy időigénye miatt. Más esetben az optimális ütemezés nem hatékonyabb annyival egy egyszerü ütemezésnél, hogy a bonyolult optimális stratégiát "megérné" alkalmazni. Ezért is van jelentőségük nemcsak optimális, hanem egyszerü heurisztikus ütemezési algoritmusoknak is. Optimális stratégia alkalmazhatatlansága esetén a probléma megoldása helyett megelégszünk közelitő megoldással. Egy optimális megoldás is lehet közelitő egy valóságos ütemezésnél amiatt, hogy az alkalmazott modell közelitő, az alkalmazott feltételezések csak közelitőleg teljesülnek.

Egy közelitő megoldás lehet olyan, hogy az esetek döntő százalékában /különlegesektől eltekintve/ garantáltan optimális, minden esetben garantált "hibával" optimális és olyan is, hogy az esetek döntő többségében /nagy valószinüséggel/ garantáltan "közel optimális".

Optimális és közel optimális ütemezések keresésének gyakran alkalmazott módja a dominancia elv alapján a megengedhető ütemezések $\mathfrak{R}$ terének jelentős szükitése egy domináns $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$ halmazra, amelynek jellemzője, hogy bármely $R \in \mathfrak{R}$ ütemezéshez van $\mathfrak{R}'$-nek olyan R' eleme, hogy

$$F/R'/ \leq F/R/ \quad \text{ha ext=min.}$$

Egy stratégia dominál egy másik stratégiát, ha mindig domináns ütemezést eredményez a másik stratégia szolgáltatta ütemezéssel szemben. Az R' ütemezés akkor dominálja R-et, ha a fenti reláció a célfüggvényre teljesül. Egy ütemezési probléma közelitő megoldására szolgáló heurisztikus stratégiát ugy igyekszünk választani, hogy az ha nem optimális is, több szempontból megfelelő legyen. Ilyen szempontok például az egyszerüség /kevés időt igényel/, az észszerüség /ne kifejezetten pesszimális legyen optimális helyett/ és a dominancia. Heurisztikus algoritmus megválasztását motiválhatja még az is, hogy hasonló ütemezési problémákban mi az optimális, vagy mi a szokásos stratégia. Heurisztikus stratégiák alkalmazásánál általában igyekszünk meghatározni a generált ütemezések hatékonyságának viszonyát az optimális ütemezéséhez, vagy legalábbis becsülni ezt a viszonyt. Ilyen vizsgálatoknál különös anomáliákra is fény derülhet. Példa erre véges determinisztikus esetben történő ütemezés, amelynek anomáliáit Graham [G4] vizsgálta behatóan [C3] . Közelitő modellekre példa a diffuzios közelités multiprogramozott processzor kihasználásának vizsgálatában [A4] .

1.3. Ütemezési problémák komplexitása.

Már viszonylag egyszerü determinisztikus ütemezési problémáknál találkozunk az optimális ütemezést szolgáltató ismert algoritmusok kivitelezésének nehézségével azok nagy időigénye miatt. Ez rendszerint olyan véges esetekben fordul elő, amikor az optimális ütemezés meghatározása minden konkrét realizációban a megengedhető, vagy a domináns ütemezések halmazának / $\mathfrak{R}$ ill. $\mathfrak{R}'$ / elemről-elemre történő kiértékelésére van szükség. Ha $\mathfrak{R}'$ számossága már a gyakorlatilag érdekes közepes paraméterértékeknél /méret/ nagyon nagy és főleg azok növekedésével nagyon gyorsan /pl.exponenciálisan/ nő, akkor az optimális ütemezést meghatározó algoritmus időigénye gyorsan elviselhetetlenné válik még a legkorszerübb számitógépeken is. Ezt az időigény növekedést jellemzi az algoritmus komplexitása. Egy probléma komplexitása alatt az ismert megoldó algoritmusok komplexitásának minimumát értjük.

A komplexitás problémája egyidős az algoritmusok és ütemezési problémák vizsgálatával. A kérdéssel az algoritmusok, különösen a számitógépi algoritmusok elméletében intenziven foglalkoznak [T1], [M4] . A komplexitás heurisztikus fogalmának preciz definiciója eléggé nehézkes. Legrendszeresebb definiciója és vizsgálata Cook [C6] és Karp [K4] cikkeiben található. Mi itt ehelyett informálisan kivánjuk a fogalmat tárgyalni az ütemezési problémákkal kapcsolatban.

Problémák komplexitásának fogalma algoritmusok komplexitásának fogalmán alapul. Egy Π probléma komplexitásán megoldó algoritmusának komplexitását értjük. A komplexitás fogalmával szorosan összekapcsolódik két fogalom: a polinomiális redukálhatóság és a probléma mérete.

Egy Π_1 probléma polinomiálisan redukálható Π_2 problémára, ha van olyan polinomiálisan korlátos idő alatt végrehajtható algoritmus, amely a Π_1 probléma megoldását szolgáltatja Π_2 megoldásaiból. A komplexitási problémát felvető problémák polinomiálisan redukálhatók eldöntési problémára, amelyet a következőképpen definiálhatunk: Π =/$\mathcal{D}$, π /, ahol $\mathcal{D}$ egy input tér /domain/ és π egy tulajdonság. Egy $\mathcal{A}$ algoritmus a Π probléma megoldása, ha bármely $I \in \mathcal{D}$ inputra meghatározza /véges idő, lépés alatt/, hogy rá a π tulajdonság igaz-e.

A $\mathcal{D}$ elemei a probléma realizációinak és eseteinek /instance/ felelnek meg. Az $\mathcal{A}$ algoritmus és megfelelően a Π probléma komplexitásáról mindig a probléma eseteinek valamilyen jellemző n "mérete" függvényében beszélünk, amely az I input függvénye. A problémáknál ez a méret rendszerint természetes módon adódik, mint n/I/ függvény, és gyakran I valamely komponenseinek összege, vagy azok értékeit ábrázoló bitek száma /ütemezési problémáknál a taskok száma is gyakori/. Az n jellemző méret specifikálása nélkül a probléma komplexitásának tulajdonsága nem adekvát fogalom. A Π probléma $\mathcal{A}$ megoldó algoritmusának minden $I \in \mathcal{D}$ inputra van egy véges t/I/ végrehajtási ideje. A Π probléma komplexitása nem más, mint a t/I/ függési jellege n/I/ mérettől: T/n/. Nem eldöntési problémára a komplexitás fogalma hasonlóan értelmezhető, vagy visszavezethető eldöntés probléma komplexitására polinomiális redukcióval. Az utóbbi azért lehetséges, mert a komplexitást rendesen csak n nagy értékei mellett és csupán T/n/ kategorizálásával elegendő jellemezni. Igy elegendő T/n/ viselkedését $n \to \infty$ mellett aszimptotikus viselkedésével jellemezni. Ekkor természetesen az n méretnek tetszőlegesen nagy véges értéknek is lehetségesnek kell lennie, vagyis n/I/ nem korlátos.

Ellenkező esetben vagy t/I/ is korlátos, vagy n/I/ méret választása nem megfelelő. A komplexitás jellegzetes megadása $O(u(n))$ alakú, amely azt jelenti, hogy van véges C ugy, hogy $\lim_{n\to\infty} O(u(n))/u(n) \leq C$.
Tipikus komplexitások: $O(n)$, $O(n^k)$, $O(n \log n)$, $O(2^n)$.
Speciálisan a komplexitás $O(1)$, ha $T(n)$ korlátos /n (t) biztosan nem jó méret, ha ugyanekkor t/I/ nem korlátos/.
Az $O(u(n))$ alakban megadott komplexitás rendszerint három vonatkozásban is csak becslés: /1/ az $O(u(n))$ értelmezése miatt, /2/ u(n) gyakran "felfelé kerekitett" ugy, hogy $\lim_{n\to\infty} T(n)/u(n) = 0$ és /3/ az $O(u(n))$ az ismert algoritmus/ok/ komplexitását /azok minimumát/ jelenti e tény emlitése nélkül. Emiatt $O(u(n))$ komplexitás helyett $O(u(n))$-korlátos komplexitás mindig precizebb kifejezés. A komplexitás ezen becslés jellegü kezelése teszi lehetővé annak meghatározását n/I/ és t/I/ meghatározott rendben pontos becslései alapján.

Edmonds [E2] nyomán, aki gráfelméleti és egész programozási problémákkal kapcsolatban vezette be, egyéb problémákra is általánosan elfogadott megkülönböztető kritérium a komplexitás polinomiális volta. A Π probléma komplexitása <u>polinomiális,</u> ha van véges $k \geq 0$ ugy, hogy $\lim_{n\to\infty} T(n)/n^k \leq C < \infty$. Könnyü igazolni, hogy, ha Π_1 polinomiálisan redukálható Π_2 problémára és Π_2 komplexitása polinomiális, akkor Π_1 komplexitása is az. Legyen a polinomiális problémák osztálya $\mathbb{P}$ és nevezzük ezeket <u>$\mathbb{P}$-problémáknak</u>

Számos klasszikus, főként kombinatorikus feladattal kapcsolatban a problémák egy olyan osztályát találták, amelyek komplexitásáról eddig nem eldöntött az, hogy polinomiális-e. Ezek osztályát $\mathbb{NP}$ jelöli, tagjai az <u>$\mathbb{NP}$-problémák.</u>
Az $\mathbb{NP}$-problémáknak több ekvivalens definiciója van a $\mathbb{P}$ problémákkal parallel.

Karp [K4] definiciója a $\mathbb{P}$ és $\mathbb{NP}$ osztályokra lényegében a következő [G5] : a $\mathbb{P}$ olyan eldöntési problémák halmaza, amelyek polinomiálisan korlátos időben /lépésben/ megoldhatók determinisztikus Turing géppel, az $\mathbb{NP}$ olyan eldöntési problémák halmaza, amelyek polinomiálisan korlátos időben megoldhatók nem-determinisztikus Turing géppel. Ullman [U1] a Turing gép helyett determinisztikus ill. nem-determinisztikus számitógépet, majd azok segitségével a $\mathbb{P}$ és $\mathbb{NP}$ probléma osztályokat definiálja. Szemléletesen fogalmazva egy Π eldöntési probléma $\mathbb{NP}$-probléma akkor és csak akkor, ha a keresési gráfja backtracking módszernél korlátos magasságú [K4] . A definicióból következik, hogy $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{NP}$. A forditott reláció teljesülése eldöntetlen. E kérdéssel kapcsolatos a problémák egy különleges osztálya, az $\mathbb{NP}$-teljes /$\mathbb{NP}$-complete, $\mathbb{NP}$-hard, /polinomial/ complete/ problémák osztálya, amelynek definiciója a következő: a Π probléma $\mathbb{NP}$-teljes, ha $\Pi \in \mathbb{NP}$ és bármely $\Pi' \in \mathbb{NP}$ probléma polinomiálisan redukálható Π -re. E problémaosztályt először Cook [C6] definiálta és azóta beható vizsgálat tárgya. Cook bizonyitotta be, hogy a Boole-kifejezések kielégithetőségének problémája $\mathbb{NP}$-teljes. Karp [K4] cikkében 21 nevezetes problémát sorol fel, amelyek $\mathbb{NP}$-teljességét bizonyitja Cook tételéből kiindulva. Ezek közül néhány népszerü megfogalmazásban: az utazó ügynök problémája, gráf szinezési probléma, hátizsák pakolási /knapsack/ probléma. Az $\mathbb{NP}$-teljes problémákkal kapcsolatos eredmények bő áttekintése található Aho-Hopcroft-Ullman [A5] könyvében.

Definició szerint az $\mathbb{NP}$-teljes problémák osztálya részhalmaza az $\mathbb{NP}$ osztálynak és azok polinomiálisan egymásra redukálhatók. Ebből következik az, hogy ha bármelyik $\mathbb{NP}$-teljes problémáról kiderülne, hogy az $\mathbb{P}$-probléma, az azt jelentené, hogy $\mathbb{P}=\mathbb{NP}$, hiszen akkor minden $\mathbb{NP}$-probléma $\mathbb{P}$-probléma a polinomiális redukálhatóság folytán.

Ha viszont akármelyik NP-problémáról sikerülne bizonyitani, hogy nem eleme P-nek /nem polinomiális komplexitású/, akkor egyetlen NP-probléma sem lehetne P-probléma és igy $P \neq NP$ bizonyitva lenne. A $P = NP$ kérdés alapvető jelentőségü, ezért komoly erőfeszitések történtek tisztázására. Ennek ellenére máig eldöntetlen, bár a sikertelenség bármely NP-teljes probléma megoldására polinomiálisan korlátos időn belül végrehajtható algoritmus segitségével, igen valószinüsiti, hogy az NP-teljes problémák nem P-problémák. Edmonds után elfogadott terminologiával azt mondhatjuk, hogy az NP-teljes problémák nagy valószinüséggel <u>kezelhetetlenek</u> /intractable/, szemben a P-problémákkal, amelyeket <u>kezelhetőnek</u> /tractable/ tekintenek. Jóllehet közepes n értékekre egy $O(n^k)$ polinomiális komplexitású algoritmus végrehajtása is reménytelenül nagy időt igényelhet, ha k nagy /$k > 3$/ és egy $O(2^n)$ exponenciális komplexitású /NP-teljes/ algoritmus még megengedhető idő alatt végrehajtható, mégis Edmonds terminológiája általában indokolt. Tapasztalat szerint ugyanis, ha egy problémának van polinomiálisan korlátos idejü megoldási algoritmusa, az rendszerint $O/n^k/$-nál, $k=3$ mellett, nem nagyobb komplexitású. $O/n/$, $O/n\log n/$, $O/n^2/$, $O/n^2 \log n \log\log n/$ tipikus polinomiális komplexitások. Karp [K4] bemutat NP-teljes problémákkal rokon 9 tipikus P-problémát is a feltételezett "határvonal" érzékeltetésére az NP-teljes és P-problémák között. Ez a határvonal az ütemezési problémákban is eléggé keresett /L. 1.1. Táblázat/. Az NP-problémáknak vannak olyan egyedei is, amelyeknél eldöntetlen, hogy NP-teljes-e. Karp három ilyen problémát emlit: a két gráf izomorfizmusa, a k egész prim volta és az $Ax \geq d$ diofantoszi egyenlőtlenség megoldhatósága eldöntési problémákat. Az ütemezési problémák köréből 1.1. Táblázat négy ilyet tartalmaz. E problémák a kutatott "határ" közelében vannak.

A komplexitás kérdéseivel foglalkozó munkák közül az eddigieken felül megemlitjük még a Specker [S2] és Borodin-Munro [B5] könyveket és Karp egy másik cikkét [K5], kifejezetten ütemezési problémák komplexitási problémáival kapcsolatban pedig néhány további munkát [B8]. Bruno-Coffman-Sethi cikke [B6] a független task-ok ütemezési problémájának komplexitását vizsgálja átlagos feldolgozási idő minimalizálására nézve, Garey-Johnson [G5] egyéb erőforrások melletti ütemezési problémák komplexitását és Garey-Johnson-Sethi [G6] a job-shop tipusú ütemezési problémák komplexitását. Az eredményeket Ullman [U2] összefoglalja a Coffman [C3] könyv egyik fejezetében. Ezeken alapszik 1.1. Táblázatunk az NP-teljes ütemezési problémák "határainak betájolására" 12 NP-teljes és 4 nyitott probléma input terének bemutatásával. A nyitott problémák felé ez a határ még bizonytalan, de a táblázat adatai mutatják, hogy milyen szük és mennyire speciális az ütemezési problémák bizonyitottan polinomiálisan korlátos komplexitású része.

A felsorolt problémákban a task-ok n száma a probléma jellemző mérete. Amely rovatban a fejléc jele ismétlődik, a megfelelő paraméter szabad paraméter, az input tér "koordinátája".

Az alkalmazott jelölések a következők:

m a processzorok száma

τ_i a task-ok processzor-igénye

$\prec$ a task-ok között előirt előidejüségi relációk halmaza

s egyéb erőforrás-igény

τ_i^x a Q_i task igénye P_x processzor iránt, τ_0 minden task-ra azonos processzorigény

$\ddot{O}$ és M összefüggő illetve megszakitásos ütemezést jelez

$\omega = \max f_i$ az ütemezési hossz /f_i a Q_i task végződése/

$\bar{f}_1=\Sigma f_i/n$ az átlagos elkészülési /fordulási/ idő

$\bar{f}_q=\Sigma q_i f_i/\Sigma q_i$ a súlyozott átlagos elkészülési idő /ráforditás/

$\bar{\Delta}_1=\Sigma D_i/n$ az átlagos késés /D_i=o, ha Q határidő előtt kész/

$\bar{\Delta}_q=\Sigma q_i D_i/ q_i$ a súlyozott átlagos késés

A processzorok a flow-shop és job-shop problémák kivételével azonosak.

1.1. Táblázat. NP-teljes ütemezési problémák [C3] .

m	τ_i	$<$	S	Felt.	Cél	Megjegyzés
m	τ_0	$<$	0	Ő	ω	[U1] ,azonos processzorigények
m	τ_i	$<$	0	M	ω	[G5]
m	τ_i	job-ok	0	Ő	$\bar{f}_1$	[B7]
fix ≥ 3	τ_0	$\emptyset$	S_i	Ő	ω	[G5], független task-ok
fix ≥ 3	$\tau_i^A, \tau_i^B, \tau_i^C, \dots$	flow-shop	0	Ő	ω	[J1] , [G6]
fix ≥ 2	τ_0	$<$	$S_i^{(*)}$	Ő	ω	[G5] (*) erőforráskapacitás 1.
fix ≥ 2	τ_0	erdő	S_i	Ő	ω	[G5]
fix ≥ 2	$\tau_0, 2\tau_0$	$<$	0	Ő	ω	[U1] ,kétféle igénynagyság
fix ≥ 2	τ_i	$\emptyset$	0	Ő	$\omega, \bar{f}_q$	[B6], [B7] , [G5]
fix ≥ 2	$\tau_i^A, \tau_i^B, \dots$	flow-shop	0	Ő	$\bar{f}_q$	[G6]
fix ≥ 2	$(\tau_{ij}^{x_1}, \tau_{ij}^{x_2}, \dots)$	job-shop	0	Ő	ω	[G6]
fix ≥ 1	τ_i	$\emptyset$	0	Ő	$\bar{\Delta}_q$	[B8], q_i késési veszteség
3	τ_0	$<$	0	Ő	ω	nyitott
3	τ_i	$<$	0	M	ω	nyitott
fix ≥ 1	τ_i	$<$	0	Ő	$\bar{f}_q$	nyitott
1	τ_i	$\emptyset$	0	Ő	$\bar{\Delta}_1$	nyitott

A táblázatban megadott paraméterértékek csökkentése, a feltételek enyhitése általában már azt jelenti, hogy a probléma polinomiális komplexitásuvá válik.

A kezelhetetlen, NP-teljes problémák fontossága szükségessé teszi, hogy polinomiálisan korlátos idejü megoldás helyett polinomiálisan korlátos idejü közelitő megoldásra törekedjünk, vagyis olyan algoritmusok konstruálására, amelyek minél rövidebb idő alatt minél "jobb" közelitő megoldást garantáljanak.

A közelitő megoldás és jóságának fogalma problémánként eltérően definiálható, azonban három tipikus kategoria létezik:

/1/ az algoritmus minden inputra "garantáltan közel optimális" megoldást szolgáltat

/2/ az algoritmus "majdnem minden" inputra optimális megoldást szolgáltat

/3/ az algoritmus "majdnem minden" inputra "garantáltan közel optimális" megoldást szolgáltat.

Egy I inputra a "garantáltan közel optimális" megoldás azt jelenti, hogy a célfüggvény értéke az extremálistól specifikált határokon belül tér csak el. A "majdnem minden" jelentheti meghatározott részét az input térnek, jelentheti szélsőséges inputok kivételét vagy valamilyen definiált mérték /pl. valószinüség/ szerint szokásos értelmezést.

Ütemezési problémáknál a közelitő megoldás mindig egy elfogadható ütemezés, amelynek hatékonysága az optimális ütemezésétől "alig" vagy "ritkán" tér el. Számos általánosan használt módszer és algoritmus létezik NP-teljes problémák közelitő megoldására és ezek bővitése és javitása állandó törekvés. A komplexitás kérdésével foglalkozó könyvek közül a [T1], [A5] , az ütemezéssel foglalkozó közül a [B1], [C3] e módszereket részletesen tárgyalják. A cikkek témája ezzel kapcsolatban vagy egy probléma megoldására egy közelitő algoritmus ismertetése /és általában értékelése/, vagy az ilyen algoritmusok összehasonlitása, vagy egy algoritmus-tipus alkalmazása különböző ütemezési probléma közelitő megoldására. Néhány cikket megemlitünk. Charlton-Death [C7] egy branch-and-bound módszert tárgyal a legáltalánosabb job-shop problémák megoldására /irodalom 1970-ig/. A job-shop problémák megoldásában elért korábbi eredményeket Sisson egy 1959-es cikke [S3] foglalja össze részletes publikációjegyzékkel együtt.

Az általános flow-shop problémák közelitő megoldási módszereit Asheur [A6] cikke, a speciális 3-processzoros, NP-teljes, flow-shop probléma megoldási módszereit Giglio-Wagner [G8] cikke. Wismer cikke [W2] példa arra, hogy speciális NP-teljes ütemezési problémát célszerü átalakitani olyan másik /hagyományos, itt az utazó ügynök probléma/ NP-teljes problémává, amelynek megoldási módszereit már kifejlesztették. Greenberger [G9] vegyes egész programozást, Manna [M5] diszkrét lineáris programozást alkalmaz ütemezési probléma közelitő megoldására. Végül Heller cikke [H2] példa numerikus kisérletekre és Giffler-Thompson cikke [G10] arra, hogy az optimális ütemezés keresése a domináns halmazon néha teljeskörü kiértékeléssel elvégezhető.

Sok gyakorlati esetben az extremális minden áron való közelitése nem optimális törekvés. Különösen igaz ez akkor, ha a célfüggvény mellett egyéb hatékonysági szempontok is szerepet játszanak, amelyek szerint az optimális megoldás nem is kedvező. Ilyen és más esetekben is optimális, vagy jó közelitő megoldás helyett egy heurisztikus megoldást, heurisztikus ütemezési stratégiát alkalmazunk. Egy heurisztikus algoritmus akkor ésszerü, ha gyors és nem kifejezetten pesszimális megoldásokra vezet. Ilyen algoritmus használatát motiválhatja a jó intuición kivül még az, hogy hasonló, vagy speciális problémákban milyen algoritmusokat használnak, ahol az algoritmus bizonyitottan jó, esetleg optimális is, és a módszer elterjedtsége, stb.. Ilyen esetekben kézenfekvő a heurisztikus stratégia szolgáltatta ütemezések hatékonyságának becslése és a különféle anomáliák vizsgálata. Ilyen szempontból két cikket emelünk ki. Graham [G4] vizsgálta a determinisztikus véges esetben a lista szerinti ütemezések anomáliáit több-processzoros ütemezésnél. Gonzalez-Ibarra-Sahni [G1] pedig különböző sebességü processzorok esetében vizsgálta ezt a kérdést egy lista szerinti ütemezés mellett.

A különféle problémákban hatékony ütemezési algoritmusok hatékonysági korlátait legátfogóbban Graham a Coffman könyv [C3] ötödik fejezetében tárgyalja.

1.4. Job-shop tipusu ütemezési problémák.

Az ütemezési problémák hagyományosan fontos tipusát alkotják a job-shop tipusúak, amelyek neve az erőforrás oldal jellegzetességét fejezi ki, amely egy <u>mühelyt</u> /job-shop/ modellez. Abban meghatározott müveletek végzésére képes gépek, munkahelyek vannak. Ezeket egy $\mathcal{P}$ processzor-készlet modellezi. Az igény oldal termékeket, munkadarabokat modellez Q job-sorozattal, amelyek megmunkálást igényelnek a mühely munkahelyeitől. A megmunkálási igényeket a job-ok task-jainak processzorigényével modellezzük. A task-ok képviselte megmunkálások sorrendje többé kevésbé kötött és ideje meghatározott. Az ütemezés meghatározott szempontok szerint leghatékonyabban kell elvégezni bizonyos technologiai feltételek betartásával. A processzorok tipusai és száma, a task-ok száma és a végrehajtási sorrendre vonatkozó kötöttségek, az igényelt processzorok változékonysága, a technológiai feltételek és hatékonysági kritériumok mind lényegesen befolyásolják a probléma komplexitását és az már igen egyszerü esetekben NP-teljes [G6], [C3], [B8]. Csupán a két-processzoros változat speciális esetei és arra visszavezethető néhány eset kivétel [C3] , amelyek megoldása Johnson [J1] korlátos komplexitású ütemezési algoritmusán alapszik az ütemezési hossz minimalizálására nézve.

Különben pedig a "job-shop probléma egy elbüvölő kihivás" [C2] , amely szemléletesen egyszerüen megfogalmazható, de reménytelenül nehezen megoldható probléma.

A job-shop tipusú ütemezési problémákkal kapcsolatos kutatások az NP-teljességük miatt elsősorban hatékony közelitő megoldásokat szolgáltató algoritmusok, bizonyos speciális esetekben hatékony algoritmusok kidolgozására, ezek értékelésére, összehasonlitására és javitására irányulnak.

A job-shop tipusú problémákkal rokon disszertációnk témája, a job-folyam ütemezési probléma is, azonban nem tipikus, hiszen a task-ok száma végtelen. Azonban mégis a job-shop problémák képezik a job-folyam ütemezési probléma környezetének egy részét. Az alábbiakban a job-shop tipusú problémákkal kapcsolatos néhány munkát emlitünk meg és érzékeltetjük a probléma teljes általánosságát.

A job-shop problémában a P processzor készlet mindig legalább két különböző tipusú processzort tartalmaz /egy tipusú processzorok esetén az egy-, vagy multiprocesszoros egyéb ütemezési problémák modelljét nyerjük/. Ha a tipusok száma $m \geq 2$, akkor $\mathcal{P}= \{\mathcal{P}^{(k)}, k=1,..., m\}$, ahol $\mathcal{P}^{(k)} = \{P_{k1}, ..., P_{km_k}\}$ azonos tipusú processzorok halmaza $m_k \geq 1$ számossággal. Tipikus esetben $m_k=1$ és ilyenkor $\mathcal{P}^{(k)}=P_k$ egyetlen önálló tipusú processzor. Tipustól függetlenül egy processzort P_ℓ /$1 \leq \ell \leq \sum m_k$ / szimbolizál.
A $\mathcal{P}^{(k)}$ elemei rendszerint azonos, egységnyi sebességüek.
A processzorok rendelkezésre állása sem időben sem valószinüségben nincs korlátozva általában, de néha az ellenkezője is lehetséges [C7] . Job-shop problémákban a processzorokon kivül egyéb erőforrás nem szokott előfordulni a modellekben.

A Q job sorozat task-jai mindig legalább két különböző tipusú processzort igényelnek. A rendszerből kihagyható minden olyan processzor-tipus, amely iránt nincs igény.
A task-ok a $Q^{(i)}$, $i=1,2,..., n$, job-ok különböző processzorokon történő kiszolgálási igényeit képviselik, vagyis $Q^{(i)}= \{Q_{ij}, j=1,..., n_i\}$, ahol n_i általában véges. Minden Q_{ij} task meghatározott $\tau_{ij} \geq 0$ idejü kiszolgálást igényel megadott k_{ij} processzor tipuson /$1 \leq k_{ij} \leq m$/.
A $Q^{(i)}$ job α_i érkezési ideje általában 0, de elő lehet irva egy $D_i > 0$ határidő kiszolgálásának befejezésére [S3] .

Határidők elő lehetnek irva egyes Q_{ij} task-okra is $d_{ij} > 0$ formában [C7] .

A job-ok és task-ok között különféle formában elő-idejüségi kötöttségek /technologiai előirások/ lehetnek megadva a következő formában: definiálva van egy tranzitiv $\lessdot$ előidejüségi reláció job, vagy task párokra és $Q^{(i)} \lessdot Q^{(i')}$ azt jelenti, hogy a $Q^{(i')}$ job kiszolgálása csak $Q^{(i)}$ kiszolgálásának befejezése után előirt idő /legtöbbször 0/ mulva kezdhető meg, $Q_{ij} \lessdot Q_{ij'}$ pedig azt jelenti, hogy $Q_{ij'}$ kiszolgálása a Q_{ij} kiszolgálásának kezdete után előirt idő mulva kezdhető csak meg. Ha az utóbbi késleltetés $a_{ijj'}$, akkor $a_{ijj'} = \tau_{ij}$ esetén a task-ok előidejüsége azonos a job-ok előidejüségének definiciójával. Ilyen esetben a $Q = \{Q_{ij}\}$ task-halmaz elemei között egy egységes előidejüségi reláció szerinti részben rendezés van megadva, amelyet irányitott gráffal ábrázolhatunk. Elegendő a szomszédos csúcsok /task-ok/ közti éleket megadni. A $Q^{(i)}$ job-ok esetleges újradefiniálásával Q task-halmazon belül elérhető, hogy minden $Q^{(i)}$ job lineárisan rendezett legyen $\lessdot$ reláció szerint. Ha $\lessdot$ definiciója a job-ok és task-ok között más, akkor a job-ok gráfjai lehetnek általánosabb irányitott gráfok, azonban hurkot nem tartalmazhatnak.

Az $\lessdot$ előidejüségi előirásokat a task-ok ütemezésénél feltétlenül figyelembe kell venni. Az ezt megsértő ütemezés nem megengedhető. A $\lessdot$ részben rendezés a job taskjainak végrehajtási sorrendjét nem feltétlenül határozza meg teljesen. Ekkor az ütemezésnek ez a sorrend szabad paramétere. Az ütemezés eredményeként egy határozott sorrend alakul ki, amely egyben a $Q^{(i)}$ job útját /routing/ határozza meg a $\mathcal{P}$ processzor rendszeren [G10] . Az ut egy processzort többször is érinthet /$n_i > \sum m_k$ esetén ez elkerülhetetlen/.

Speciális job-shop problémához jutunk akkor, ha $P^{(k)}=P_k$, $n_i \leq m$ minden k-ra ill. i-re és minden $Q^{(i)}$ job minden P_k processzoron legfeljebb egyszer igényel kiszolgálást. A kiszolgálási sorrend /routing/ különböző lehet. Ha a kiszolgálási sorrend is azonos /legalábbis $\tau_{ij}=0$ megengedésével azzá tehető/, azaz $k_{ij} \equiv k_j$, akkor a flow-shop problémához jutunk. Ez egy gyártó-szalag, gépsor modelljének tekinthető, amelynél a munkadarabok haladási iránya a gépek között csak egyféle lehet.

Visszatérve az általános job-shop problémához, legáltalánosabb esetben ahhoz, hogy egy Q_j task P_ℓ processzoron való kiszolgálását egy $Q_{j'}$ task $P_{\ell'}$ processzoron való kiszolgálása kövesse, egy $C_{j\ell j'\ell'} \geq 0$ közbeeső idő – átkapcsolási, felszerelési /changeover time [C7] , set-up time/ szükséges. Más modellben ez a késleltetés a task-ok kezdőpontjai között van előirva [G10] .

Az előidejüségi korlátozások és a kiszolgálási intervallumok relativ helyzetére vonatkozó fenti korlátozások már a modellek kiszolgálási feltételeihez tartoznak. A job-shop tipusú problémákban a task-ok kiszolgálása rendszerint összefüggő, vagyis a processzor, miután elkezdte, soha nem szakitja meg egy task kiszolgálását. Két speciális kiszolgálási feltételt emlitünk még meg. Bizonyos task-párok között elő lehet irva, hogy azok csak egymással párhuzamosan szolgálhatók ki, tehát kiszolgálási intervallumaik egymásba esnek [C7] . Egy sokkal gyakrabban realisztikus feltétel az, hogy egy $Q^{(i)}$ job kiszolgálása a task-ok között sem késleltethető, vagyis miután a $Q^{(i)}$ job az első processzoron kiszolgálásra került, azonnal el kell kezdődnie kiszolgálásának a következő igényelt processzoron és igy tovább. Az ilyen modell irja le egy "melegmegmunkálás" problémáját, amelynél ha egy termék megmunkálása megindul, az akadálytalanul kell lefollyon a teljes gépsoron megszakitás nélkül.

Hengermüvek és más spontán állapotváltozásnak kitett munkadarabokat megmunkáló mühelyek munkájának ütemezésére ez a modell alkalmas. E probléma tipus vizsgálata is hagyományos [S4] és intenziv. Utóbb Knapp [K6] és Wismer [W2] is vizsgálták és a problémát az utazó ügynök problémára vezetik vissza, amelyre a közelitő algoritmusok választéka igen bő.

A job-shop tipusú problémákban, legalábbis véges esetben, az $\omega = \max f/C_{ij}/$ ütemezési hossz minimalizálása a cél és a hatékonyságot az ütemezési hossz méri. Emellett azonban az 1.2. pontban emlitett egyéb hatékonysági mértékeket is használják [S3] . Bármely hatékonysági mezőszám mellett a probléma általában kezelhetetlen /L.1.3. pont/, legalábbis determinisztikus esetben. A sztochasztikus esetben τ_{ij} igények és egyéb /pl. $C_{jj'\ell\ell'}$ / változók valószinüségi változók, amelyek eloszlására vonatkozóan állnak rendelkezésre előzetesen bizonyos ismeretek, vagy megfigyelés és mintavétel segitségével gyüjtünk ismereteket. Sisson egy 1959-es áttekintésében [S3] a determinisztikus modellt, amelyet "mechanikainak" nevez általában irreálisnak tekinti a valóságos job-shop feladatok modellezésére. Azonban ennek megoldhatatlansága is magyarázza, hogy a sztochasztikus modellnek sincs sikeres analitikus kezelési módszere és megoldása. Ő egy harmadik "termodinamikai" modellt tart reálisabbnak amelynél a $Q^{(i)}$ job-ok állapotát véletlennek tekintve azok változását vizsgálják és a stacionárius állapotban a teljes job-shop rendszer müködését jellemzik. A vizsgálati modellekhez tartoznak még a különféle sorbanállási modellek is. Ezekre a modellekre vonatkozó korábbi eredményekre Sisson cikkében bő utalást találunk, valamint az addigi eredmények áttekintését.

A későbbi munkák közül megemlitjük Manne [M5] cikkét /1960/, aki diszkrét lineáris programozási módszert, Greenberg [G9] cikkét, aki kevert egész probléma megfogalmazással a branch-and-bound módszert az általános job-shop illetve flow-shop probléma megoldására alkalmazta . Giffler és Thompson [G10] egy direkt módszert javasolnak az u.n. aktiv ütemezések domináns halmazának teljes meghatározásával, vagy abból mintavétellel az optimális ütemezés, vagy nagy valószinüséggel optimális ütemezés kiválasztására. Számitási tapasztalataik kedvezőek. Charlton és Death [C7] cikke egészen általános job-shop modellre fogalmazza meg a branch-and-bound módszer alkalmazását, amelynél a nem megengedhető ütemezések kiszürésére grafikus módszert javasol. Egyszerü példa illusztrálja a módszer bonyolultságát, hét speciális eseten azonban megmutatja, hogy a módszer használható és sokszor ismert módszerekkel válik azonossá. Bibliográfiája jó válogatás az 1970-ig megjelent vonatkozó munkák közül a különféle megoldási technikák tekintetében. Campbell-Dudek-Smith egyszerü kézzel végrehajtható heurisztikus stratégiát alkalmaznak a flow-shop probléma közelitő megoldására, [C8] .

A flow-shop probléma kisérleti vizsgálatára példa Heller [H2] cikke és legfontosabb ütemezési technikák kisérleti összehasonlitására Ashour [A6] cikke. Végül megemlitjük Giglio és Wagner [G8] cikkét, akik kizárólag a három-processzoros NP-teljes flow-shop probléma megodására vizsgálnak módszereket, nevezetesen az egész lineáris, közönséges lineáris programozási módszer alkalmazását, véletlen mintavételezést és heurisztikus módszert. A heurisztikus módszer a két processzor esetén optimális Johnson-féle módszeren alapszik. A módszereket numerikus példákon mutatják be.

A nem polinomiálisan korlátos két-processzoros /átlagos feldolgozási idő célfüggvénnyel/ és a három-processzoros flow-shop problémát vizsgálja egyébként Ignall és Schrage [I2] cikke is branch-and-bound technikával.

Utoljára hagytuk azon néhány speciális eset ismertetését, amelynek polinimiálisan korlátos komplexitású megoldása ismeretes. A megoldások mind a két-processzoros flow-shop probléma megoldására Bellman [B9] és Johnson [J1] által felfedezett és Johnson módszer néven ismertté vált algoritmus alkalmazásán alapszanak. Ez a módszer felfedezése /1954/ óta sok heurisztikus stratégiának is alapja. A módszer ismertetése minden könyvben megtalálható, ahol a flow-shop probléma tárgyalásra kerül /l.pl. [C2], [B1], [C3], [C5] , stb./. A módszeren több $O/n \log_2 n/$ komplexitású algoritmus alapszik. Érdemes összefoglalni azt a néhány eredményt, amely e módszer alkalmazásával kapcsolatos.

A <u>két-processzoros flow-shop</u> problémában legyen $P= \{ P_A, P_B\}$ két különböző tipusú processzor és $Q^{(i)}=(A_i, B_i)$, $i=1,\dots, n$, véges sok task-pár, amelyek közül az A_i mindig a P_A processzoron, a B_i task pedig a P_B processzoron igényel kiszolgálást $A_i \prec B_i$ sorrendben τ_i^A illetve τ_i^B időtartamban. A $Q^{(i)}$ job-ok függetlenek, azaz kiszolgálási sorrendjük bármi lehet. A kiszolgálást összefüggően kell végezni ugy, hogy az ütemezési hossz minimális legyen.

Johnson bizonyitja [J1] , hogy dominánsak azok az ütemezések, amelyeknél a két processzoron azonos a kiszolgálás sorrendje [B1] , [C3] . Elegendő tehát csupán az $1,2,\dots, n$ indexek permutációinak megfelelő L listák szerinti ütemezésekkel foglalkozni /permutation schedule/. Tetszőleges $m > 2$ processzornál ez nem igaz. Igazolható,hogy dominánsak azok az ütemezések, amelyeknél a P_1 és P_2, valamint a P_{m-1} és P_m processzor-párokon azonos a $Q^{(i)}$ job-ok ütemezési sorrendje.

Ebből következik, hogy m=3 esetben még dominánsak a lista szerinti ütemezések [C2] , $m>3$ esetre azonban már ellenpélda adható [C5] . Bármely m mellett dominánsak azok az ütemtervek, amelyeknél a processzorok soha nem tétlenek, ha van igény, amelyet kiszolgálhatnának. Igy a P_1 processzoron a Q_{i1} task-ok szünet nélkül ütemeződnek. Ebből két-processzoros esetre következik, hogy $a=\max_i f/B_i/$ ütemezési hossz akkor minimális, ha a P_B processzor tétlenségi ideje a $[0,\max_i f/A_i/)$ intervallumon minimális. Ez ugyanis azonos a P_B processzor teljes $\omega - \sum_i \tau_i^B$ tétlenségi idejével a $[0, \omega)$ szakaszon. Ezen a felismerésen alapszik a Johnson-féle szabály optimalitásának bizonyitása /l.pl. [B1] /.

A Johnson szabály a következő: optimális /minimális hosszúságú/ ütemezést szolgáltat az L lista szerinti ütemezés, ha abban $Q^{(i)}$ megelőzi $Q^{(i')}$ job-ot valahányszor

$$/1.1/ \qquad \min /\tau_i^{(1)}, \tau_{i'}^{(2)}/ \quad \min /\tau_{i'}^{(1)}, \tau_i^{(2)}/ ,$$

ahol

$$\tau_i^{(1)} = \tau_i^A , \quad \tau_i^{(2)} = \tau_i^B , \quad i=1,2,\dots,n.$$

Belátható, hogy az /1.1/ reláció tranzitiv, ezért jól rendezi azokat a job-okat, amelyek között /1.1/ helyett nem egyenlőség áll fenn. Ha /1.1/ helyett egyenlőség teljesül, akkor $Q^{(i)}$ és $Q^{(i')}$ sorrendje a lista szerinti ütemezés ω hosszát nem befolyásolja. Ilyen esetben több optimális sorrend létezik. Az összes ilyen sorrend egy nem üres részhalmazát az alábbi egyszerü algoritmusok bérmelyikével meghatározhatjuk [B1] .

J1. Algoritmus:

0.Lépés: $I=\{1,2,\dots,n\}$, L_1 és L_2 üres listák

1.Lépés:

$$\tau_{i'}^{(k')} = \min_{\substack{i\in I\\ k=1,2}} \tau_i^{(k)}$$

2.Lépés: Ha $k'=1$, akkor $Q^{(i')}$-t tegyük az L_1 lista végére;
Ha $k'=2$, akkor Q^i -t tegyük az L_2 lista elejére;
$I=I-\{i'\}$

3.Lépés: Ha $I=\emptyset$, akkor $L=L_1 \cup L_2$, egyébként 1. Lépés.

Vége.

Az 1. Lépésben az igények halmazának minimuma nem feltétlenül egyértelmüen határozza meg i' és k' indexeket. Ilyenkor az alkalmasak közül a választás önkényes és ezáltal az L optimális listák halmazának bizonyos elemeit kaphatjuk meg.
Az algoritmust egyértelmüvé tehetjük pl. ugy, hogy az 1. Lépésben több i' esetén a legkisebbet $\tau^{(1)}_{i'}=\tau^{(2)}_{i'}$ esetén $k'=1$ értéket választunk.

J2. Algoritmus:

0.Lépés: V és W üres halmazok,

1.Lépés: $i=1,2,\dots,n$ mindegyikére

$Q^{(i)}$ kerüljön V halmazba, ha $\tau_i^{(1)} < \tau_i^{(2)}$;
$Q^{(i)}$ kerüljön W halmazba, ha $\tau_i^{(1)} > \tau_i^{(2)}$;
$Q^{(i)}$ kerüljön valamelyik halmazba, ha $\tau_i^{(1)} = \tau_i^{(2)}$;

2.Lépés:

L_1 lista legyen a V halmaz nem-csökkenő $\tau_i^{(1)}$ szerint rendezve;

L_2 lista legyen a W halmaz nem-növekvő $\tau_i^{(2)}$ szerint rendezve; $L=L_1 \cup L_2$;

Vége.

Az 1. Lépésben a $\tau_i^{(1)}=\tau_i^{(2)}$ esetekben a besorolás, majd a 2. Lépésben a halmazok rendezése azonos paraméterértékek esetén önkényes és különböző, egyformán optimális listát eredményez. Az algoritmust egyértelmüvé teszi, ha $\tau_i^{(1)}=\tau_i^{(2)}$ esetén $Q^{(i)}$ a V-be kerül és V rendezésénél azonos $\tau_i^{(1)}=\tau_i^{(1)}$, esetén a kisebb indexü megelőzi a nagyobb indexüt.

Johnson [J1] azt is bizonyitja, hogy m=3 processzor esetén is alkalmazható néha az /1.1/ szabály optimális ütemezés meghatározására. Van optimális lista szerinti /permutációs/ ütemezés. Legyenek $\mathcal{P}=\{P_1, P_B, P_C\}$ a processzorok és $Q^{(i)}=/A_i, B_i, C_i/$ a job-ok /i=1,..., n/. Ha $\tau_i^{(1)}=\tau_i^{A}$, $\tau_i^{(2)}=\tau_i^{B}$ választással a Johnson szabály szerint /P_A, P_B/ processzor-párra és $\tau_i^{(1)}=\tau_i^{B}$, $\tau_i^{(2)}=\tau_i^{A}$ választással a /P_B, P_C/ processzor-párra azonos L optimális lista kapható, akkor ez optimális a /P_A,P_B,P_C/ processzor-hármasra is [B1] . Azt is Johnson bizonyitja először, hogy ha a job-ok P_A és P_C processzor igénye dominál a P_B igényekkel szemben, akkor az optimális lista a Johnson szabály szerint határozható meg $\tau_i^{(1)}=\tau_i^{A}+$ $+\tau_i^{B}$, $\tau_i^{(2)}=\tau_i^{B}+\tau_i^{C}$ választással. Ez biztosan igaz, ha

$$\max_i \tau_i^{B} \le \max /\min_i \tau_i^{A}, \min_i \tau_i^{C}/ ,$$

vagyis bármely A_i task, vagy bármely C_i task igénye legalább akkora mint a B_i task-ok maximális igénye. Ha ezek a feltételek nem teljesülnek, vagy m > 3 esetre, a Johnson szabály gyakran alkalmas heurisztikus stratégiák kidolgozására [C2] .

A Johnson szabály alkalmazásához még Mitten [M6] és Jackson [J2] munkájára utalunk. Mitten a két-processzoros flow-shop problémában az $A_i \lessdot B_i$ elöidejüségi relációt ugy általánositotta, hogy B_i nem kezdődhet korábban A_i kezdete plusz $a_i > 0$ idő és nem végződhet korábban, mint

A_i végződése plusz b_i idő [B1] . Bizonyitható, hogy ha az L listát a Johnson szabály szerint szerkesztjük

$$\tau_i^{(1)}=\tau_i^A+\max\left[a_i-\tau_i^A, b_i-\tau_i^B\right],\ \tau_i^{(2)}=\tau_i^B+\max\left[a_i-\tau_i^A, b_i-\tau_i^B\right]$$

paraméter választással, akkor e lista szerinti ütemezés optimális lesz /minimális hosszuságú/ a lista szerinti /permutációs/ ütemezések között. Ez nem jelent azonban feltétlenül lehető legkisebb ütemezési hosszat, amely most nem biztos, hogy lista szerinti ütemezésnél adódik. Mitten eredménye alapján optimális listát szerkeszthetünk $m > 2$ processzor esetén is, ha az első és utolsó processzorok dominánsak, a $P_2, \dots, P_{m-1}$ processzorok sosem képezhetnek szük keresztmetszetet. Ekkor

$$a_i=\sum_{j=1}^{m-1}\tau_{ij}\ ,\quad b_i=\sum_{j=2}^{m}\tau_{ij}$$

és ennek megfelelően

$$\tau_i^{(1)}=\tau_{i1}+\sum_{j=2}^{m-1}\tau_{ij}\ ,\quad \tau_i^{(2)}=\tau_{im}+\sum_{j=2}^{m-1}\tau_{ij}$$

választással alkalmazzuk a Johnson szabályt [B1] .

Jackson [J2] a Johnson szabályt olyan m=3 processzoros esetre is alkalmazta, amelynél a $\mathcal{P}^B=\{P_{B1},P_{B2},\dots,P_{Bn}\}$ minden job-ra külön processzor. Vagyis $Q^{(i)}=/A_i,B_i,C_i/$, ahol A_i és C_i mind a P_A ill. a P_C processzoron kiván kiszolgálást és $A_i < B_i < C_i$ azonban B_i lényegében nem igényel ütemezést. A Johnson szabály alkalmazhatóságának feltétele az, hogy a P_B processzor sosem jelentsen szük keresztmetszetet, amit most P_B-nek a $\mathcal{P}^{(B)}=\{P_{B1},P_{B2},\dots P_{Bn}\}$ processzor-készlettel való helyettesitésével érünk el, vagy ugy teljesülhet, ha a $\tau^A{}_i$ és $\tau^C{}_i$ igények dominánsak $\tau^B{}_i$ igényekkel szemben. Ez igaz lehet például egy számitógépnél, ha a job-ok strukturája /input,compute, output/ és az input processzor jelenti a szük keresztmetszetet.

Q interpretálható úgy is, hogy a B_i task-ok csak τ_i^B idejü eltolódást képviselnek az A_i és C_i task-ok végrehajtása között és nem igényelnek processzort. Mitten [M6] szerint $\tau^B_i < 0$ is lehetséges, amelyet Johnson is észrevett [J3].

Bár a job-shop probléma már m=2 processzorra NP-teljes [G6], [C3], Jackson [J2] megmutatta, hogy az $m=2$, $n_i=2$ speciális egyszerü job-shop probléma visszavezethető a Johnson szabály alkalmazására. Legyen $Q^{(i)}=\{Q_{i1}, Q_{i2}\}$ task-pároknál egyszer a P_A, másszor a P_B az első, Q_{i1} task igényelte processzor. Q_{i2} mindig a másik processzort igényli, vagy hiányzik, vagyis $k_{i1} \neq k_{i2}$ $\tau_{i1} > 0$, $\tau_{i2} \geq 0$.

Szerkesszük meg az L listát az alábbi algoritmus szerint.

J3. Algoritmus:

0.Lépés: V és W üres halmazok;

1.Lépés: i=1,2,..., n mindegyikére

$Q^{(i)}$ kerüljön V-be, ha $k_{i1}=A$ $\quad$ $/k_{i2}=B/$

$Q^{(i)}$ kerüljön W-be, ha $k_{i1}=B$ $\quad$ $/k_{i2}=A/$

2.Lépés:

Legyen L_1 a V halmaz elemeinek a listája a Johnson szabály szerint;

Legyen L_2 a W halmaz elemeinek a listája a Johnson szabály szerinti forditott sorrendben.

A P_A processzoron $L_1 \cup L_2$, a P_B processzoron $L_2 \cup L_1$ sorrendben ütemezzük az A_i ill. B_i task-okat az elöidejüségi előirást meg nem sértve.

Vége.

Az igy szerkesztett ütemezés minimális hosszuságú ütemezés lesz [C2,C3] . Ez nem feltétlen egyértelmü, a Johnson szabály többértelmüsége folytán.

Megjegyezzük még, hogy a Johnson szabály csupán az ütemezési hossz hatékonysági mérőszámra optimális az emlitett speciális esetekben és nem optimális, sőt igen rossz lehet más mérőszám szempontjából /pl. átlagos feldolgozási idő [C2]/.

1.5. Idő-kritikus ütemezési problémák

Az ütemezési problémáknál sok esetben egyes igények /task-ok, job-ok/ kiszolgálásának befejezésére esedékességi, vagy határidők vannak előirva. Határidő esetén annak túllépése vagy meghatározott veszteséggel jár, vagy az ütemezést elfogadhatatlanná teszi. Az első esetben a veszteség minimalizálása, a másodikban elfogadható ütemezés konstruálása a cél.

Határidővel /due date/ összekapcsolt ütemezési feladatok vizsgálatával több szerző foglalkozik [G11], [G12], [C2], [B1], [C3] . Az igények száma itt mindig véges. Az összefüggő ütemezés problémája azonban már egy processzor esetén NP-teljes [B8], [C3], [K4] .

Bizonyos rendszereknél, például folyamatirányitásnál és hibrid számitásoknál jellemző probléma, hogy külső jelek /pl. megszakitások/ hatására meghatározott tevékenységet kell meghatározott időn belül elvégeznie valamely processzornak. A tevékenységeket igényeknek, a külső jeleket az igények érkezésének tekintve egy különleges ütemezési problémával állunk szemben. Az igények /task-ok/ időben ismétlődve korlátlan számban érkeznek, függetlenül a kiszolgálásuk módjától legalábbis addig, amig az határidőre megtörténik. Az igények több független job formájában jelentkeznek és a feladat a processzor/ok/ megfelelő ütemezése ugy, hogy minden igényt folyamatosan határidőre kiszolgáljunk. Általában megengedett a megszakitásos kiszolgálás, de a túl sok megszakitással sok "átkapcsolás" jár és előnytelenül nagy járulékos terhelést /overhead time/ okozhat a processzornak. Mivel az igények jelentkezésének folyamata autonom, független a kiszolgálástól, ezért az igények szintje adott és egy ütemezési stratégia annál hatékonyabb, minél magasabb igény-szinteket képes elfogadhatóan ütemezni.

Egy S stratégia számára egy igény-rendszer elfogadható és a stratégia szerinti ütemezés megvalósitható /feasible/, ha minden igény határidőre kiszolgálást nyer. Egy S stratégia dominálja S' stratégiát, ha S minden igényrendszerre elfogadható ütemezést ad, ha S' azt ad. Optimális az az S stratégia, amely elfogadható ütemezést ad minden igény-rendszerre, amely az adott erőforrással /processzor készlettel/ egyáltalán kiszolgálható.

Az ilyen jellegü ütemezési problémákat nevezzük idő-kritikus ütemezési problémáknak. Valós-idejü /real time, hard-real time/ folyamatok ütemezése témájaként is tárgyalják. Az idő-kritikus ütemezés problémáját Fineberg és Serlin [F2] vetette fel hibrid /analog-digitális/ számitógéppel kapcsolatosan, majd Serlin [S5], [S6] és mások [M7], [L1], [L2] vizsgálták a következő ciklikus job modell formájában. Az igény egy $Q = \{Q^{(i)}, i=1,\dots,n\}$ job-készlet, amelynek $Q^{(i)} = \{Q_{ij}, j=1,2,\dots\}$ job-jai végtelen sokszor megujuló τ_i nagyságú igényt képviselő task-ok sorozatai. A Q_{ij}, $j=1,2,\dots,$ task-ok rendre a $t_{ij}=t_{io}+/j-1/\ T_i$ pillanatokban jelennek meg /akkor készek az ütemezésre/ és azokat d_i időn belül ki kell szolgálni. Az igény-oldalt tehát a

$$Q \doteq \{(t_{io}, d_i, \tau_i, T_i), i=1,2,\dots\}$$

adatok jellemzik, ahol

$$0 < \tau_i \leq d_i \leq T_i.$$

Egy ilyen adott érték-együttest egy Q konfigurációnak nevezünk [L1] . Egy S/Q/ ütemezés megengedhető, ha az a $Q^{(i)}$ job számára a $[t_{ij}, t_{ij}+d_i)$ intervallumban τ_i ideju kiszolgálást biztosit egybefüggően, vagy megszakitással.

A ciklikus job-ok problémájának optimális megoldása egy P processzorra az u.n. <u>relativ sürgősségi</u> /relative urgency/ stratégia, amely szerint minden pillanatban a legközelebbi határidejü task-ot kell kiszolgálni,ha még aktiv /van ki nem szolgált "várakozó" igénye/. Több azonos határidejü igények között a processzort egyenlő arányban meg kell osztani /pl. időszeleteléssel/ [L1], [C3] . A relativ sürgősségi algoritmus azon feltétel mellett optimális, hogy a döntés és a processzor "átkapcsolási" ideje zérus, illetve elhanyagolható. Ez a feltételezés nem mindig reális. Egyszerübb stratégiák ettől függetlenül is érdekesek. Minden stratégiával kapcsolatban kérdés annak kritériuma, hogy egy Q konfigurációt elfogadjon. Ha $R_S(Q)$ a Q konfiguráció elfogadható ütemezése, akkor a P processzor kihasználtsága

$$\gamma(Q)=\sum_{i=1}^{n}\tau_i/T_i,$$

amely független az ütemezéstől. Ezt a mennyiséget a Q konfiguráció terhelési tényezőjének /load factor [S6] / nevezzük. Nyilván $\gamma(Q) > 1$ esetén Q elfogadhatatlan bármely S ütemezési algoritmus számára. $\gamma(Q) \leq 1$ tehát szükséges feltétel. De korántsem elegendő. $d_i=T_i, i=1,\dots,n$, mellett a relativ sürgősségi algoritmus számára a $\gamma(Q) \leq 1$ szükséges és elegendő feltétel [L2], [C3] . A $d_i < T_i$ esetre és egyéb ütemezési stratégiákra nem ismertek használható feltételek. Serlin [S6] és Liu-Layland [L2] egyéb stratégiákat is vizsgáltak és ezek közül a <u>fix</u> lista szerinti <u>prioritásos ütemezések</u> a legérdekesebbek. Ezeknél a $Q^{(i)}$ job-ok egy L listába vannak rendezve és valahányszor egy job aktivvá válik /igényli a processzort/, azonnal kiszolgálásra kerül, ha a processzor szabad, vagy a listában később álló job foglalja le. Az utóbbi esetben a később álló job kiszolgálása felfüggesztődik.

Az ilyen S_L prioritásos stratégiákra vonatkozóan megadható a terhelésnek egy felső határa, amely felett már megadható elfogadhatatlan konfiguráció; olyan amelyet egyetlen S_L stratégia sem fogad el. Ez a határ a $\gamma_n = n/2^{1/n}-1/$, amelynek aszimptotikus értéke $\ln 2 \approx 0{,}69$.

A prioritásos ütemezések közül optimális azon L_o lista szerinti, amelyben a $Q^{(i)}$ job-ok monoton nem-csökkenő d_i értékek szerint vannak rendezve [S6], [L2]. $d_i = T_i$ esetén ez azt jelenti, hogy a prioritás annál magasabb a $Q^{(i)}$ job-nál, minél nagyobb az $1/T_i$ frekvenciája τ_i igényétől függetlenül a többi frekvenciájához viszonyitva. Egy S stratégia mellett egy Q konfiguráció teljesen kihasználja /fully utilize/ a processzort, ha elfogadott, de bármelyik τ_i igény bármilyen kis növelése esetén már nem elfogadott. Tekintsük az S_L prioritásos stratégiák mellett teljesen kihasználó konfigurációk terhelésének minimumát. Ez éppen a γ_n. Bármilyen Q konfigurációhoz, amelyre $\gamma(Q) < \gamma_n$, van olyan prioritásos S_L, amely elfogadja, de olyan Q konfigurációhoz, amelyre $\gamma(Q) > \gamma_n$, már nem biztos. Ez nem jelenti azt, hogy $\gamma(Q) > \gamma_n$ esetén nem lehet S_L stratégia, amely elfogadja, de ennek már speciális feltétele van T_i-kre vonatkozóan. Ha például t_{io} mind azonos és $d_i = T_i$, továbbá T_i osztója a T_n-nek, akkor 1 a kihasználási határ γ_n helyett. Egyébként a processzor kihasználtsága többféle módon növelhető. Egy kézenfekvő megoldás nem időkritikus háttér-job-okkal kihasználni a P processzor szabad idejét. Másik lehetőség a következő vegyes stratégia: az n job közül $n' < n$ számú legkisebb d_i értékü job-ot egy L' listába rendezzük nem-csökkenő d_i érték szerint és azokat prioritás szerint ütemezzük. A megmaradó szabad időben a P processzorra a megmaradó $n-n'$ job-ot relativ sürgősség szerint ütemezzük. Erre a stratégiára azonban nehéz megadni az elfogadhatóság feltételét.

Az ismert eredmények [L2] nem praktikusak.

Az egy-processzoros ciklikus job ütemezési probléma természetes általánositása a több processzoros eset [M7]. A több processzor azonban ilyen igény-rendszernél nem előnyös az egy processzorral szemben, ha az egy processzor sebessége /teljesitménye/ nem kisebb, mint a több processzoré együtt [S6]. Azonban az idő-kritikus ütemezés is egy rendszer müködésének részeként lép fel, amely az erőforrás-rendszert és ütemezés számára meghatározhatja $m > 1$ számú processzor formában is. A ciklikus job-ok speciális esete a periodikus job-ok, amelyeknél $d_i = \tau_i$. Ez azt jelenti, hogy az igényt jelentkezésének pillanatában összefüggően ki kell szolgálni. Ilyen periodikus job-ok ütemezésének kérdésével Soh [S7] foglalkozott disszertációjában. Heurisztikus stratégiák hatékonyságát becsülte és vizsgálta a különféle anomáliákat. Két kérdés merül fel: /1/ Milyen Q job-rendszert képes egyetlen processzor kiszolgálni és /2/ adott Q job-rendszerhez mi a minimális számú azonos processzor, amely azt ki tudja szolgálni. A kérdések általánosan nem megoldottak. Gonzalez-Soh [G13] egy különleges esetet megoldottak: t_{io} tetszőlegesek és a frekvenciák rendre feleződnek, $1/T_{i+1} = 1/2T_i$, $i=1,2,\dots,n-1$. Ekkor egy processzoron a Q konfiguráció biztosan ütemezhető csökkenő frekvencia szerinti sorrendben, ha egyáltalán létezik elfogadható ütemezése. A processzorok számát egy Q konfiguráció ütemezésénél minimalizálja, vagyis optimális, az az algoritmus, amely a csökkenő frekvencia szerinti sorrendben a $Q^{(1)}, Q^{(2)},\dots$ job-okat rendre a $P_1, P_2, \dots$ processzorok közül az első olyanhoz rendeli, amelyen az első job $T_i, - \tau_i$, "szünetének" hossza eléri a τ_i igény hosszát. Ha ilyen már igénybevett processzor nincs, új processzort veszünk igénybe.

A processzorok minimális száma, valamint azok átlagos kihasználtsága analitikusan nem ismert.

Az eddig emlitett idő-kritikus modellekben az igények mind determinisztikusak és job-onként állandók. Ennyiben hasonlitanak a szabályos job-folyamokra. Nincs tudomásunk a probléma sztochasztikus változatának vizsgálatáról. Minden további nélkül véletlennek tekinteni a Q minden adatát, nincs értelme, hiszen ha a d_i határidő ismeretlen a t_{ij} pillanatban, akkor illuzórikus szigorú határidőről beszélni. Ha viszont a valószinüségi változók időben ismertek is, kezelhető eloszlások esetén abszolut biztosan csak m=n számú processzorral biztosithatjuk minden $d_i \geq \tau_i$ határidő teljesitését is. Ezért a kérdés inkább úgy vethető fel, hogy különböző stratégiák mellett mi a valószinüsége annak, hogy egy Q realizáció ütemezése egy S stratégia szerint elfogadható. Ennek megalapozása olyan vizsgálatokat igényel, amelyek a sztochasztikus folyamatok elméletében nem feltétlenül újak, hiszen más problémákkal kapcsolatban is szükségesek. Ilyenek a másodlagos folyamatokkal kapcsolatos koincidencia vizsgálatok [B10] . Ezzel kapcsolatosan Takács munkáira utalunk [T2], [T3] . Különösen intuitivnek tünik párhuzamos /szimultán/ történés-folyamatok /happenings/ koincidenciájának vizsgálata, amelyet Rényi [R1] és Takács [T4], [T5] végeztek és részecskeszámlálók müködésével kapcsolatban merült fel. A sztochasztikus folyamatok elméletében ismert eredmények vizsgálata az ütemezési feladatok szemszögéből igéretesnek tünik. Ezzel azonban nem kivánunk foglalkozni.

1.6. Job-folyamok ütemezési problémáiról általában.

A szabályos job-folyampár általunk vizsgált ütemezési problémáinak bevezetéseképpen e pontban áttekintjük azt, amit job-folyamok ütemezéséről tudunk.

A job-folyam elnevezést olyan $Q^{(i)}=\{Q_{ij}, j=1,2,...\}$ végtelen job-ra használjuk, amelynél a Q_{ij} task-ok felváltva egy P_A és egy P_B processzor-tipuson igényelnek kiszolgálást. Célszerübb használni erre a

$$Q^{(i)}=\{C_{ij},\ j=1,2,...\}\ ,\qquad C_{ij}=(A_{ij},\ B_{ij})$$

jelölést, aholaz A_{ij} task a P_A, a B_{ij} task a P_B tipusú processzortól igényel τ_{ij}^{A}, illetve τ_{ij}^{B} idejü kiszolgálást. A $Q^{(i)}$ job task-jai lineárisan rendezettek előidejüség szempontjából, vagyis $A_{ij} < B_{ij}$ és $C_{ij} < C_{i,j+1}$. E jelölés feltételezi, hogy minden job-folyam Q_{i1} első task-ja a P_A processzort igényli. Lévén azonban az ütemezések most végtelen tartamúak egy P_B processzort igénylő első Q_{i1} task figyelmen kivül hagyható, mert bármely hatékonysági mérőszámot vagy nem befolyásol, vagy a befolyása kiszürhető.

Az erőforrásnak két processzor-tipust kell tartalmaznia, $\mathfrak{P}=\{\mathfrak{P}^{(A)}, \mathfrak{P}^{(B)}\}$. Ütemezési probléma csak akkor merül fel, ha legalább egyik tipusú processzorból kevesebb van, mint a job-folyamok száma. Teljes általános $\mathfrak{P}^{(A)}=\{P_{A1},...,P_{Am_A}\}$, $\mathfrak{P}^{(B)}=\{P_{B1},...,P_{Bm_B}\}$, $Q=\{Q^{(i)}, i=1,...,n\}$, $1\leq m_A \leq n$, $1\leq m_B\leq n$, $2\leq m_A+m_B<2n$ esetről nincs mit mondanunk. Tudomásunk szerint a problémát még nem vizsgálták. Ugyanigy nincs mit mondani arról a még általánosabb job-folyamról, amelynél a processzorok tipusa kettőnél több-féle és a job egy határozott sorrendben /routing/ végtelen sokszor igényli a processzor-tipusokat.

Két speciális esetre kivánunk csupán utalni, amelyekre vonatkozóan eredményekre is hivatkozhatunk. Mindkét esetben $\mathfrak{P}^{(A)}=\{P_A\}$ egyetlen processzor. A P_B-tipusú processzoroknál két esetet vizsgálunk.

$\mathfrak{P}_B$ eset: $\mathfrak{P}^{(B)}=\{P_{B1},\dots, P_{Bn}\}$, vagyis annyi P_B-tipusú processzor van ahány job-folyam.

P_B eset: $\mathfrak{P}^{(B)}=\{P_B\}$, egyetlen P_B processzor van.

A $\mathfrak{P}_B$ esetre vonatkozóan bizonyos sztochasztikus esetekben végeztek vizsgálatokat n=2 mellett, amelyekre viszszatérünk. Determinisztikus esetben ennek speciális esete a szabályos job-folyampár ütemezési problémája, amely disszertációnk témája.

A P_B eset a két-processzoros flow-shop probléma általánositásának tekinthető, amelyben az igények minden kiszolgálás után megujulnak. Ezt az esetet megvizsgálva azonnal látjuk azonban, hogy a probléma jellege teljesen eltér a véges két-processzoros flow-shop problémától a megoldás módszerét tekintve.

Elöszőris bármely végtelen igény-sorozat esetén az ütemezési hossz szükségképpen végtelen és tetszőlegesen távoli időpontokban is történik kiszolgálás. Ezért a véges esetben szokásos hatékonysági kritériumok legtöbbjének /ütemezési hossz, átlagos elkészülési idő, stb./ nincs értelme. Eléggé természetes hatékonysági jellemző végtelen esetben az erőforrások közepes kihasználási foka, amint az ütemezés előrehalad. Egy P_X processzor kihasználtsága alatt egy ütemezéskor végtelen esetben a

$$/1.2/ \qquad \gamma_X = \lim_{t\to\infty} \frac{\tau^X(t)}{t}$$

határértéket értjük, ahol $\tau^X(t)$ a P_X processzor aktivitási ideje a $[o,t)$ intervallumon összesen.

Olyan ütemezéseket, amelyeknél /1.2/ határérték nem létezne, kizárunk a megengedhető ütemezések közül. Több processzor kihasználtságát egy

$$\gamma = \frac{\sum_X \alpha_X \gamma_X}{\sum_X \alpha_X}$$

súlyozott átlagos kihasználtsággal jellemezhetjük, ahol $\alpha_X \geq 0$ megadott konstansok. γ érték lehet az ütemezés hatékonyságának mértéke és a cél ennek maximalizálása. A $\mathcal{P}_B$ esetben γ_A , a P_B esetben pedig $\gamma=(\alpha_A\gamma_A+\alpha_B\gamma_B)/(\alpha_A+\alpha_B)$ a célszerü hatékonysági mérőszám, ahol α_X=0,1 speciális értékekkel a két processzor kihasználtságát külön,és számtani közepüket szintén nyerjük.

Végtelen determinisztikus esetben a végtelen sok τ_{ij}^X igények megadása /i,j,x/ függvényében pl. analitikusan lehetséges. Tekintsük azt a speciális esetet, amikor

$$\tau_{ij}^X=\tau_i^X \quad , \; j=1,2,\dots$$

nem függ j-től. Vagyis az A_{ij} task-ok minden j-re ugyanakkora kiszolgálást igényelnek. Ugyanigy a B_{ij} task-ok. Ekkor nevezzük a $Q^{(i)}$ job-folyamot <u>szabályos job-folyamnak.</u> τ_i^A , τ_i^B a job-folyam paraméterei. Vezessük még be a

$$\tau_i=\tau_i^A+\tau_i^B, \; i=1,2,\dots,n, \; \tau^X=\sum_{i=1}^n \tau_i^X, \; X=A,B, \quad \tau=\tau^A+\tau^B$$

jelöléseket is.

Definiáljuk a $Q=\{Q^{(i)}, \; i=1,\dots,n\}$ szabályos job-folyam készlethez a $\bar{Q}=\{\bar{Q}^i, \; i=1,\dots,n\}$ job-sorozatot, amelynél $\bar{Q}^{(i)}=C_i=(A_i,B_i)$ egy task-pár τ_i^A , τ_i^B igényekkel a P_A ill. P_B processzor iránt. $A_i \lessdot B_i$, egyébként C_i, i=1,2,...,n, függetlenek.

Ennek ütemezése a flow-shop probléma amelynek megoldását az 1.4. pont szerint a Johnson-szabály szolgáltatja.

Legyen $L=([1], [2], \ldots, [n])$ az 1,2,..., n egészek egy permutációja és egyben a $Q^{(i)}$, vagy $\bar{Q}^{(i)}$ job-ok egy listája, amelyben az i-edik helyen az $[i]$ indexü job helyezkedik el. Definiálunk három féle ütemezést az L lista szerint.

Round-robin ütemezésnek nevezzük azt, amelynél az L lista szerinti sorrendben ciklikusan körbe járva a $Q^{[1]}, Q^{[2]}, \ldots, Q^{[n]}$ job-folyamoknak mindig a következő task-párját ütemezzük a P_A és P_B processzoron a lehető legkorábbi időpontra betartva az előidejüségi megkötéseket.

Lista-szerinti ütemezésnél az L lista szerinti sorrendben mindig a legelső job-folyam következő task-párját ütemezzük, amelyet az előidejüségi megkötések lehetővé tesznek, valahányszor a P_A processzor szabad. Ha nincs ilyen job-folyam az adott pillanatban, akkor P_A tétlen lesz a következő $f(B_{ij})$ pontig.

Prioritásos ütemezésnél valahányszor egy job-folyam egy task-ja ütemezésre kész, az igényelt processzorra ütemezzük, ha a processzor szabad, vagy az L listában később álló job-folyam task-ját szolgálja ki. Az utóbbi esetben az alacsonyabb prioritású task kiszolgálása felfüggesztődik és a megszakitó task befejezése után folytatódik.

Legyen L egy tetszőleges lista. Legyen $R_L(\bar{Q})$ a $\bar{Q}$ task-pár készlet L lista szerinti szoros ütemezése és legyen ennek hossza

$$\omega = \omega_B \doteq \max_i f/B_i/.$$

Az $R_L(\bar{Q})$ ütemtervben a P_A processzor teljesen foglalt az

$$\omega_A \doteq \max_i f/A_i/$$

pillanatig, innen kezdve viszont szabad /tétlen/.

A P_B processzor nem lehet tétlen az $[\omega_A, \omega)$ intervallumban, hiszen ott B-task indulást $A \lessdot B$ kikötés nem késleltethet. Ezekből következik, hogy

$$\omega_A = \tau^A \quad \text{és} \quad u_A \doteq \omega - \tau^A \leq \tau^B .$$

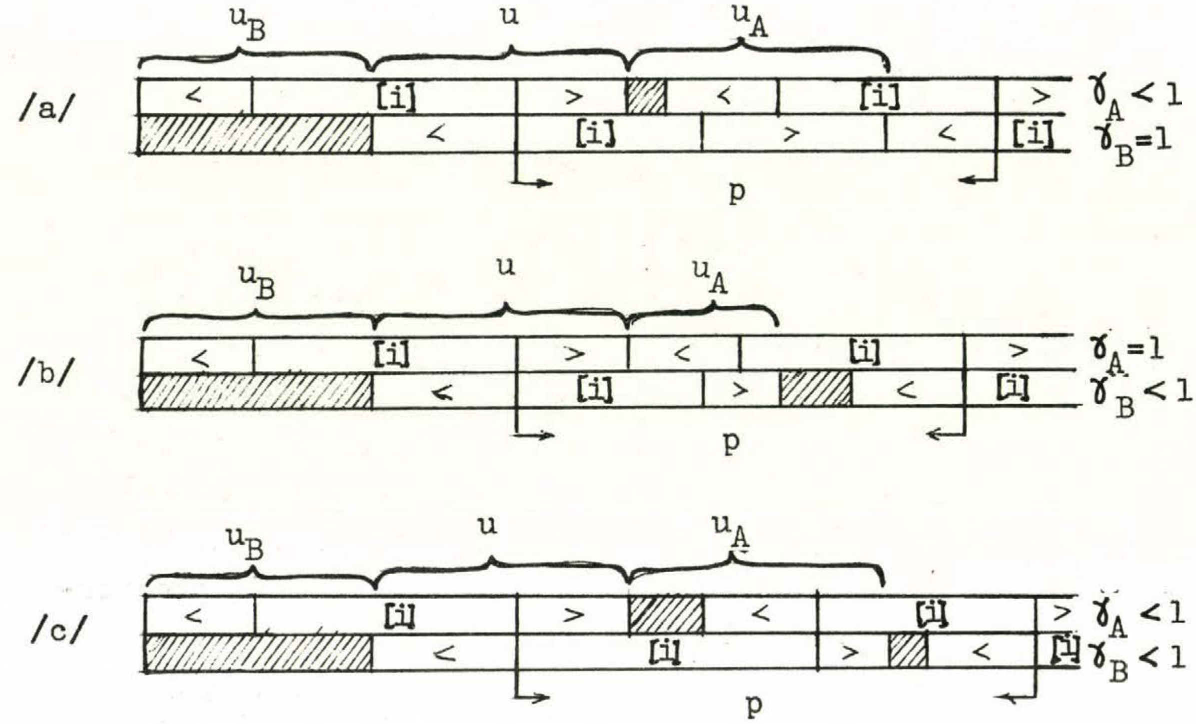
A P_B processzor állásideje a $[0, \omega_A)$ intervallumon összesen

$$u_B \doteq \omega - \tau^B \leq \tau^A .$$

Toljuk a $[0, \omega_A)$ szakaszon kiszolgált B_i task-okat a P_B processzoron "jobbra" addig, amig minden közbülső tétlenségi szakasz eltünik és a P_B pontosan a $[0, u_B)$ szakaszon lesz tétlen. Jelölje $\bar{R}_L(\bar{Q})$ az igy nyert megengedhető /nem szoros/ ütemezést. A P_A processzor $[\omega - u_A, \omega)$ és a P_B processzor $[0, u_B)$ tétlenségi intervallumai biztosan diszjunktak a fenti relációk miatt és mindkét processzor aktiv egy $[u_B, \omega - u_A)$ szakaszon, amelynek hossza

$$u \doteq \omega - u_A - u_B = \tau^A - u_B = \tau^B - u_A = \tau - \omega \geq 0 .$$

Konstruáljunk most az $\bar{R}_L(\bar{Q})$ ütemtervből egy $\bar{R}_L(Q)$ ütemtervet a Q job-folyam készletre olymódon, hogy az $\bar{R}_L(\bar{Q})$ ütemtervet korlátlan sokszor "egymás mellé" helyezve olyan szorosra összetoljuk, hogy valamelyik processzoron a foglaltsági szakaszok összeérjenek, vagy egy $\lessdot$ kikötés a további összetolást ne engedje. A három lehetséges esetet az 1.2. Ábrán az /a/, /b/ és /c/ részlet szemlélteti.



1.2. Ábra. Az $\bar{R}(Q)$ ütemezés három esete.

Az $\bar{R}(\bar{Q})$ ütemtervben biztosan van egy $C_{[i]}$ task-pár, amelynek task-jai csatlakozva ütemeződnek, mert ellenkező esetben az $[f/A_i/, s/B_i/]$ intervallumok mind pozitiv hosszuságuak lennének és ezek minimumával a P_B processzor teljes ütemezését balra tolhatnánk. Ez azonban ellentmond annak, hogy $R(\bar{Q})$ ütemterv szoros volt. Az ábrákon [i] jelzi a $C_{[i]\,j}$ task-ok intervallumait és $<$ ill. $>$ jelek az $\bar{R}(\bar{Q})$-ban előbb ill. utóbb ütemezett task-ok intervallumait. Igy a P_X processzoron a $<$, [i], $>$ jelzésü szakaszok hossza megfelelően

$$\tau_<^X \doteq \sum_{\ell=[1]}^{[i-1]} \tau_\ell^X, \quad \tau_{[i]}^X, \quad \tau_>^X \doteq \sum_{\ell=[i+1]}^{[n]} \tau_\ell^X .$$

Az /a/ és /b/ ábrákon a P_A processzoron a $< \cup [i]$ együttes szakasz megoszlása a $<$ és $[i]$ részekre, valamint a P_B processzoron az $[i] \cup >$ szakasz megoszlása az $[i]$ és $>$ részekre nem befolyásolja γ_X kihasználtságokat, amig a /c/ eset feltétele be nem következik.

A /c/ ábrán a $\gamma_A < 1$, $\gamma_B < 1$ tényt az okozza, hogy

$$\tau_{[i]}^A > \tau_<^B + \tau_>^B = \sum_{\ell \neq [i]} \tau_\ell^B = \tau^B - \tau_{[i]}^B \quad \text{és}$$

$$\tau_{[i]}^B > \tau_<^A + \tau_>^A = \sum_{\ell \neq [i]} \tau_\ell^A = \tau^A - \tau_{[i]}^A, \quad \text{vagyis}$$

$$/*/ \qquad \tau_{[i]} > \tau^B \quad \text{és} \quad \tau_{[i]} > \tau^A .$$

/Ebből $\tau_{[i]} > \tau/2$ következik, de forditva nem./

Ha /*/ nem teljesül, vagyis

$$\tau_{[i]} \leq \tau^B, \text{ vagy } \tau_{[i]} \leq \tau^A,$$

akkor a /c/ eset már nem következik be és a γ_A és γ_B közül az egyik 1 lesz. Az $\overline{R}(Q)$ ütemterv minden esetben periodikus

$$p = \max / \tau^A, \tau^B, \tau_{[i]} /$$

periodushosszal, amelyről belátjuk, hogy ekvivalens

$$/1.3/ \qquad p = \max / \tau^A, \tau^B, \tau_i \mid i=1,2,\ldots,n /$$

kifejezéssel. Legyen ugyanis

$$\max_{1 \leq i \leq n} \tau_i = \tau_{i^*} = \tau^* .$$

Ha $\tau_{[i]} = \tau^*$, akkor nincs mit bizonyitani. Legyen tehát $\tau_{[i]} < \tau^*$. Belátjuk, hogy akkor $\max / \tau^A, \tau^B / \geq \tau^*$. Legyen $t = f/A_{[i]}/ = s/B_{[i]}/$ a $C_{[i]}$ task-pár definició szerinti csatlakozási pontja.

Az L listában a C_{i^*} task-pár vagy a $C_{[i]}$ elött, vagy utána van és ennek megfelelően mindkét task-ja vagy a t pont elött, vagy utána kerül kiszolgálásra. Ennek megfelelően vagy $\tau^* \leq t$, vagy $\tau^* \leq \omega - t$. Azonban $u_B \leq t \leq \omega - u_A$ egyenlőtlenségsorból $\omega - \tau^B \leq t \leq \tau^A$, és ezt figyelembe véve, $\tau^* \leq t \leq \tau^A$, vagy $\tau^* \leq \omega - t \leq \tau^B$.

A P_X processzor kihasználtságát minden esetben

$$\gamma_X = \frac{\tau^X}{p}$$

formulából nyerjük, amely /1.3/ figyelembevételével

$$/1.4/ \qquad \gamma_X = \frac{\tau^X}{\max/\max(\tau^A, \tau^B), \max_i \tau_i/}, \quad X = A,B$$

alakba irható. Ebből kiolvashatók az 1.2. Ábrán jobboldalt jelzett egyenlőtlenségek. Az /1.4/ formula egy fontos tényt jelez: <u>γ_X kihasználtságok nem függnek az L listától, vagyis a job-folyamok sorrendjétől.</u>

Az $\bar{R}_L(Q)$ általában nem szoros ütemterv, azonban balratolásokkal szorossá tehető. Az 1.2. Ábra szerinti /a/ esetben a P_A processzoron balra tolásokkal legfeljebb véges sok periodus után $f/B_{ij}/ = s/A_{i,j+1}/$ csatlakozás következik be minden esetben és utána már minden periodusban egy azonos fix mértékü balratolás ismétlődik, igy γ_X kihasználtságok nem változnak meg. A /b/ esetben a P_B processzoron csupán a $<$ szakaszok csúsztathatók balra a $>$ szakaszig, vagy egy $f/A_{ij}/ = s/B_{ij}/$ csatlakozásig. γ_X ismét változatlan. A /c/ esetben mindkét processzoron periodusonként a $<$ szakaszok csúsztathatók balra és γ_X azonos marad. Könnyü belátni, hogy ha az L lista szerint round-robin ütemezést végzünk, akkor éppen azt az $R_L(Q)$ szoros ütemtervet nyerjük, amelyet $\bar{R}_L(Q)$ szorossá tevésével fentebb definiáltunk.

Ilymódon a round-robin ütemtervek γ_X kihasználtsága nem függ az ütemezési sorrendtől. Sőt olyan kiegyensúlyozott összefüggő ütemezések γ_X kihasználtsága, amelyeknél valamely $t > o$ ponttól kezdve mindig teljes, bár különböző L listák szerinti "gazdaságos" ütemezés történik, azonos γ_X kihasználtságokat eredményeznek, de mindenképpen igaz, hogy γ_X nem növekedhet semmilyen olyan kiegyensúlyozott ütemezéssel amelynél az egyes job-folyamok ütemezésének relativ gyakorisága 1/n, legalábbis határértékben. Ennek preciz megfogalmazását mellőzzük.

Teljesen eltérő ütemezési feltételeket jelent az, ha megengedjük az egyes job-folyamok ütemezési gyakoriságainak eltérését. Igy pl. egyik job-folyam kétszer, a másik egyszer sem kerül egy L listába és igy ütemezünk az L lista szerint. Az ilyen enyhitő feltételnek nem mindig van megvalósitási lehetősége, illetve triviálisan csak rosszabb hatékonyságú ütemezéseket generálna, ezért felesleges. Ennek precizebb megvitatása helyett csupán néhány szempontot emlitünk, amelyeket figyelembe kell venni.

(I) Egy $Q^{(i)}$ job-folyam $A_{i,j+1}$ task-ja akkor ütemezhető csak, ha már a B_{ij} task befejeződött.

(II) Ha az L listába a $Q^{(i)}$ job-folyamot még egyszer beiktatva úgy, hogy az (I) feltétel tétlen P_A nélkül is biztositott, ha mindkét $Q^{(i)}$ példány egy és ugyanaz, tehát nem függetlenek, akkor $\tau_i^A > \tau_i^B$ mellett egy /a/ tipusú $\bar{R}_L(Q)$ ütemterv $\Delta_A u = u_A - u_B = \tau^B - \tau^A > 0$ tétlenségi szakasza $\min / \Delta_A u, \tau_i^A - \tau_i^B / > 0$ idővel csökken. Ha $\Delta_A u - / \tau_i^A - \tau_i^B / \geq 0$, akkor ez lesz a P_A csökkent tétlenségi ideje periodusonként. Ha viszont $\Delta_A u - /\tau_i^A - \tau_i^B/ < 0$, akkor a P_A tétlenségének eltünése mellett a P_B processzoron egy $/\tau_i^A - \tau_i^B/ - \Delta_A u > 0$ nagyságú tétlenségi idő fog fellépni.

A /b/ esetben egy $\tau_i^A < \tau_i^B$ tulajdonságú job-folyam duplikálásával redukálhatjuk P_B tétlenségi szakaszát, ha (I) is biztositható. A /c/ esetben az (I) feltétel egyetlen job-folyam ismétlésével sem biztositható.

Az (I) teljesülésének feltétele egyébként /a/ és /b/ esetben $\tau_>^A > \tau_{[i]}^B$ vagy $\tau_<^B > \tau_{[i]}^A$ és ezenkivül egyéb feltételek. Ezek konkrét esetben azonnal eldönthetők. Igy esetleg a $\bar{\gamma}$ átlagos kihasználtság fokozható.

(III) A γ_X hatékonysági mérőszám nemcsak az L lista esetleges (II) szerinti "bővitésével", hanem az L csökkentésével is növelhető bizonyos esetekben. Az /a/ esetben egy $\tau_i^A < \tau_i^B$ tulajdonságú $Q^{(i)}$ job-folyam elhagyásával $\Delta_A u$ csökkenthető, bár /b/, vagy /c/ esetbe változhat át. Ez a módszer a /c/ eset javitására is alkalmas lehet, de csak a $Q^{[i]}$ elhagyása javithatja γ_X bármelyikét. Lényegében az $\bar{R}(Q')$ round-robin ütemezések közül kell a maximális hatékonyságút kiválasztani, ahol $Q' \subseteq Q$ részhalmazai az eredeti teljes job-folyam készletnek. $Q' \subset Q$ esetén azonban a $Q - Q'$ job-folyamok kiszolgálása teljesen elmrad és kérdés, hogy ezáltal az eredeti ütemezési feladatot oldottuk-e meg. Az L lista szerinti ütemezés ekvivalens lehet egy ilyen $R(Q')$ ütemezéssel, hiszen a lista végén álló job-folyamok esetleg egyáltalán nem kerülnek ütemezésre. Az ilyen ütemezések vizsgálata még nem történt meg tudomásunk szerint és a megoldás erősen függőnek látszik a megengedhető ütemezések terének megválasztásától. Tovább bonyolitja a helyzetet, ha a prioritásos ütemezéseket is megengedjük. n=2 esetben könnyü példákat találni arra, hogy a round-robin ütemezésnél jobb a processzorok kihasználtsága, mint bármelyik prioritásos ütemezésnél. Ezzel szemben példát lehet adni arra is, hogy a prioritásos ütemezés a jobb hatékonyságú.

A következő kérdés általános megválaszolása nem triviális n=2 esetben sem: milyen feltételek mellett, melyik ütemezés optimális? Ezek a kérdések külön tanulmányozást igényelnek.

A determinisztikus eset után foglalkozzunk röviden a sztochasztikus job-folyam modellekkel. Alapjában ilyennek tekinthetők a multiprogramozású számitógépek, számitógéphálózatok, time-sharing rendszerek és multiprocesszáló rendszerek olyan modelljei, amelyekben az igények megújuló processzor-igények, köztük input-output igényekkel, vagy gondolkodási idővel /pl. terminálok/. A B_{ij} task-okat gyakran megkerülik az A_{ij} task-ok érkezési törvényszerüségeinek közvetlen bekapcsolásával a modellbe. Igy különféle tömegkiszolgálási /sorbanállási/ modellekhez jutnak [C5], [L3], [A7], [G14], [C9], [B11], [M8], [K7], [B12], [M9], [J4], [A2], stb . A sorbanállási modellekkel azonban rendszerint nehezen használható eredményeket nyernek a processzor/ok/ kihasználtságára annak ellenére, hogy erős feltevésekkel /pl. exponenciális érkezésközi és kiszolgálási idők/ élnek. Bizonyos feltételezésekkel a processzor kihasználtságának vizsgálata egyszerüsődik, ha a sorbanállási modelleknél diffuziós közelitést alkalmaznak. Az ilyen jellegü munkák közül kiemeljük Gaver-Shedler [G2], [G3] , Kobayashi [K2], [K3] és Arató [A4] eredményeit. Arató a diffuziós modell segitségével a számitógép központi egységének /CPU/ kihasználását vizsgálta erős terhelés mellett és prioritásos ütemezés alkalmazása esetén. Kimutatta, hogy két exponenciális strukturájú job-folyam esetén a CPU kihasználás akkor jobb, ha a rövidebb várható igényü job-folyam kap prioritást. Pontosabban: τ_{ij}^{X} mind független és csak i-től és X-től függő exponenciális eloszlásúak, akkor előnyősebb a kisebb $E(\tau_{ij}^{B})$ várható értékü job-folyamnak prioritást adni.

Arató szerint bizonyitható, hogy $E(\tau_{1j}^{B}) << E(\tau_{2j}^{B})$ esetén tetszőleges eloszlás mellett $Q^{(1)}$ job-folyam prioritása optimális. Itt fontos lehet azonban, hogy $E(\tau_1^B)$ lényegesen kisebb legyen $E(\tau_2^B)$ várható értéknél, mert ellenkező esetben az állitás hamis. Erre Tomkó [T6] mutat példát igen érdekes cikkében, amelyben a CPU kihasználtságot vizsgálja különböző prioritási stratégiák mellett diffuziós közelités nélkül.

Tomkó a $\mathcal{P}_B$ esetben a következő modellt vizsgálja: a $Q^{(i)}$ job-ok függetlenek független, de azonos $F_i(x)$ill. $G_i(x)$ eloszlású, τ_{ij}^{A} és τ_{ij}^{B} véletlen igényekkel. A P_A processzor kihasználtságát határozza meg különböző ütemezési stratégiák mellett, amelyet $\gamma = E(\alpha)/(E(\alpha)+E(\beta))$ definiál, ahol $E(\alpha)$ és $E(\beta)$ a P_A processzoron váltakozó foglaltsági és tétlen szakaszok várható hossza. Tomkó [T6] eredményei közül megemlitjük a következőket:

(i) n=2 és $G_i(x)$, i=1,2, exponenciális eloszlás esetén $E(\alpha)$ és $E(\beta)$ meghatározható a prioritásos és FIFO /érkezési sorrendü = first come first served/ kiszolgálás mellett egyaránt, az eloszlások paraméterei segitségével.

(ii) Ha $G_i(x)$, i=1,2, szintén exponenciális /exponenciális struktura/, akkor

$$\gamma_< > \gamma_0 > \gamma_>$$

ahol $\gamma_<$ a kihasználtság akkor, ha a kisebb I/O igényü job a prioritásos, $\gamma_>$ a forditott esetben és γ_0 a FIFO kiszolgálásnál. Ha Q nem teljesen exponenciális strukturájú, akkor $\gamma_< < \gamma_>$ is előfordulhat.

2. Racionális közelitések és koincidencia feladatok.

A 3. Fejezetben a szabályos job-folyam pár ütemezésénél kulcskérdéssé válik két job-folyam független ütemezései közötti meghatározott jellegü koincidenciaviszony felismerése. Ezért a következőkben megfogalmazzuk általánosan a koincidencia feladatot, amely az ütemezésnél fellépő feladatok általánositásának tekinthető. Az általános koincidencia feladatok megoldására elért eredmények azután az ütemezés vizsgálatánál használhatók. Látni fogjuk, hogy a koincidencia feladatok megoldása szoros kapcsolatban áll a racionális közelitések problémájával, amely a lánctörtfejtésen és az euklideszi algoritmuson alapszik. A lánctörtekkel kapcsolatos eredményeket azért is áttekintjük ebben a fejezetben, mert az ütemezési problémákban felmerülő koincidencia feladatok megoldására az euklideszi algoritmus általánositásának tekinthető módszereket alkalmazunk, melyek a lánctörtek elméletében ismeretekkel analóg összefüggéseket eredményeznek.

A 2.1. pontban a koincidencia feladatot /KIF/ fogalmazzuk meg és jelöléseket vezetünk be későbbi használatra. A 2.2. pontban definiáljuk a KIF fogalmát. A 2.3. pontban tisztázzuk a KIF megoldásának exisztencia problémáját. A 2.4. pont a szabályos lánctörtfejtéssel kapcsolatos később hivatkozott fogalmakat és összefüggéseket tartalmazza. A 2.5. pont a racionális közelités és a diofantikus approximáció problémájának megoldására vonatkozó eredményeket idéz későbbi hivatkozás érdekében. Végül a 2.6. pont ezeket az eredményeket alkalmazza a KIF megoldására algoritmikusan megfogalmazva.

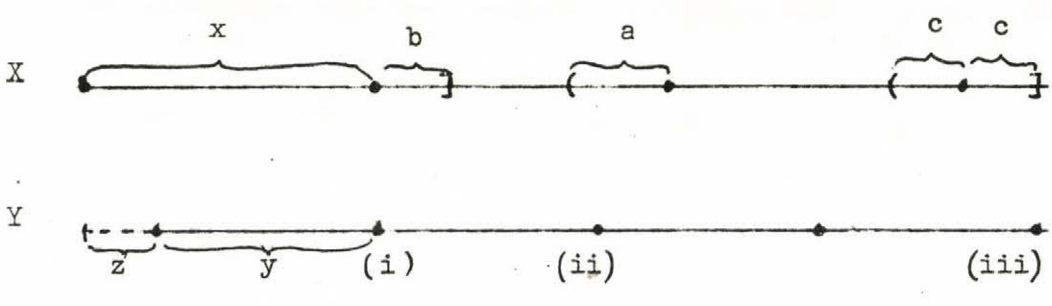
2.1. Ütemezés és koincidencia feladat. Jelölések.

A szabályos job-folyam pár ütemezésekor tipikus lesz az ilyen feladat: párhuzamosan fut az X és az Y periodikus folyam/at/ és a fázisaik közötti bizonyos relációk teljesülésekor dönteni kell a folyamok további sorsát illetően. Tehát bizonyos koincidencia-szituációk fellépését fel kell ismerni. Az első koincidencia-szituációtól kezdve a folyamok további futása beavatkozás révén megváltozik. Három tipikus koincidencia-szituációt mutat a 2.1. Ábra:

/i/ Y folyam "lehagyja" az X folyamot, de b-nél kisebb /nem nagyobb/ mértékben

/ii/ Y folyam a-nál jobban /nem rosszabbul/ "beéri" az X folyamot

/iii/ Y folyam c-nél jobban /nem rosszabbul/ "megközeliti" az X folyamot



2.1. Ábra: Párhuzamos folyam-pár koincidenciái.

A "lehagyja", "beéri" és "megközeliti" jelentheti azt is, hogy "egybeesik vele". Az X és Y folyamot tulajdonképpen csak a kx ill. z+ky pontok képviselik, ahol $k \geq o$ egész. Hogy az ilyen koincidencia feladat a szabályos job-folyam pár ütemezésénél $\mathcal{P}_B$ esetben /l. 1.6. pont/ tipikus, nyilvánvalóvá válik, ha a feladatot igy interpretáljuk: az X folyam a kx pontokban egy b tartamú lefoglalását váltja ki valamilyen apparátusnak /processzor/, az Y folyam pedig ugyanannak az apparátusnak az a idejü lefoglalását igényli minden z+ky pillanatban. Ha az Y folyam a-nál jobban beéri, vagy b-nél kevésbé hagyja le az X folyamot, akkor igényük az apparátus iránt ütközik és már az első ilyen koincidencia esetén dönteni kell az ütköző igények sorsáról.

Az ütemezési feladatokban az ilyen koincidencia-szituációkkal kapcsolatban az első két kérdés:

(α) fellép-e egyáltalán, és ha igen

(β) melyik az első fellépésének a helye?

E kérdéspár megválaszolásának feladatát nevezzük <u>koincidencia feladatnak</u> /KIF/. Ennek megoldását követi az ütemezési döntés meghozatala, az ütemezési igény-konfliktus feloldása.

Az (i) - (iii) három jellegzetes tipusát képviseli a KIF-eknek, amelyek speciális esetei a következő pontban tárgyalt általános KIF-nek.

A továbbiakban szükségünk van néhány speciális jelre és jelölésre, amely a tárgyalást egyszerüsiti.

Vezessük be a

$$\lceil \text{ és } \lfloor$$

jeleket a (és [kezdő, illetve) és] vég-zárójel pár közös jelzésére. $b \geq a$ esetén a

$$\lceil a, b \lfloor$$

forma jelölhet egy bármely oldalról egymástól függetlenül nyilt, vagy zárt intervallumot /a=b esetén bármely oldalról nyilt intervallum üres, vagy tilos/.

Vezessük be a

$$\preccurlyeq \text{ és } \succcurlyeq$$

vagy i megkülönböztető index alkalmazásával a

$$\preccurlyeq_i \text{ és } {}_i\succcurlyeq$$

szimbolumokat a $<$ és $\leq$, illetve $>$ és $\geq$ reláció-jel párok közös jelölésére. Legyen

$$\preccurlyeq' \text{ és } '\succcurlyeq$$

a $\preccurlyeq$, ill. $\succcurlyeq$ alternativ értéke, vagyis pl.

$$\preccurlyeq \; = \; \leq \quad \text{esetén} \quad \preccurlyeq' = < .$$

Az ${}_i\geqslant$ szimbolum a $\leqslant_i$ szimbolum értékének ellentettjét jelöli, vagyis pl.

$$\leqslant_i = < \quad \text{esetén} \quad {}_i\geqslant \; = \; > .$$

Ezeket alternativ relációjeleknek nevezhetjük. Az

$$a \leqslant b \quad \text{és} \quad b \geqslant a,$$

az

$$a \not\leqslant b, \quad a' \geqslant b \quad \text{és} \quad b \leqslant' a$$

relációk ekvivalensek. E mesterkéltnek tünő szimbolumok hasznát rövidesen tapasztaljuk majd.

Egy X valós szám egész-, illetve törtrészére használjuk a szokásos

$$[X] \quad \text{illetve} \quad \{X\}$$

jelölést. Néha használjuk majd tetszőleges

α, β, γ valós számokra az

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\gamma}$$

általános kongruencia fogalmat, ami azt jelenti, hogy

$$\left\{\frac{\alpha}{\gamma}\right\} = \left\{\frac{\beta}{\gamma}\right\}.$$

Azt mondjuk, hogy γ osztója α-nak, ha

$$\left\{\frac{\alpha}{\gamma}\right\} = 0 \quad \text{, azaz} \quad \alpha \equiv 0 \pmod{\gamma}.$$

Bevezetünk még négy speciális lépcsős függvényt. Legyen a valós argumentumra

$$f_<(z), \quad f_\leq(z), \quad f_>(z), \quad f_\geq(z)$$

rendre a z-nél kisebb, illetve nem-nagyobb maximális, illetve a z-nél nagyobb, illetve nem-kisebb minimális egész szám. Mind a négy függvény kifejezhető a $[z]$ egészrész függvénnyel, monoton nem-fogyó és balról, vagy jobbról folytonos egész értékü lépcsős függvény /2.2. Ábra/. Érvényesek az alábbi összefüggések.

Az $f_<(z)$ függvény balról folytonos /2.2/b Ábra szaggatott vonal/ és

/2.1/a/ $\quad z-1 \leq f_<(z) = -[-z] - 1 < z.$

Az $f_{\leq}(z)$ függvény jobbról folytonos /2.2/a Ábra folytonos vonal/ és

/2.1/b/ $\quad z - 1 < f_{\leq}(z) = [z] \leq z.$

Az $f_{>}(z)$ függvény jobbról folytonos /2.2/a Ábra szaggatott vonal/ és

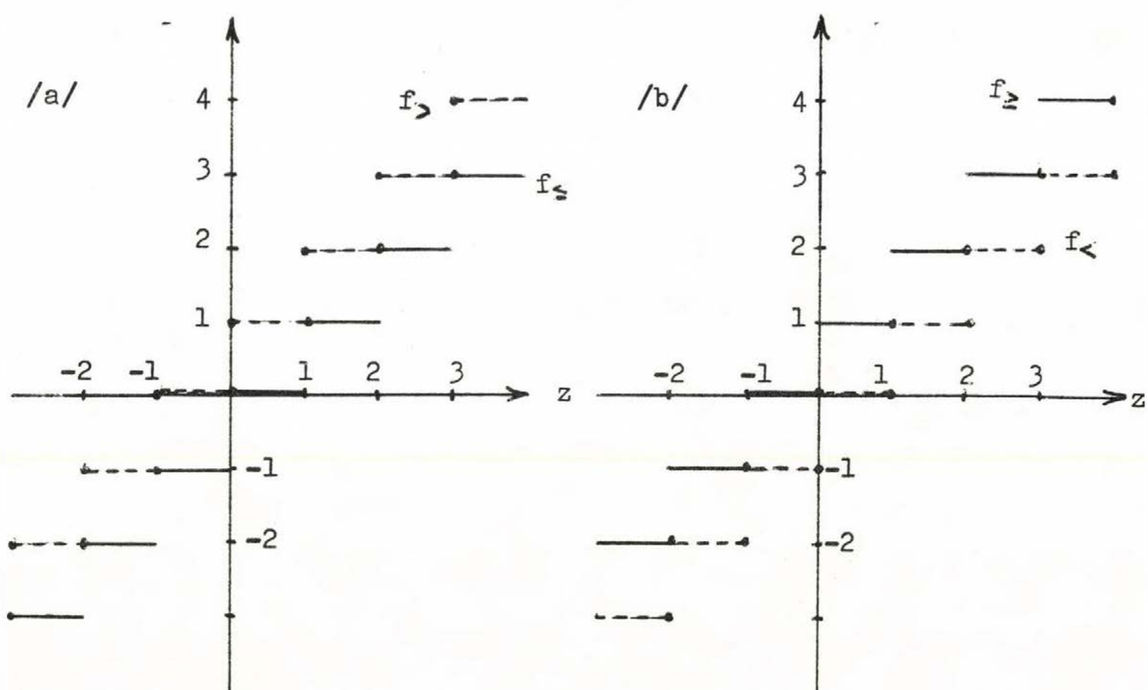
/2.1/c/ $\quad z < f_{>}(z) = [z] + 1 \leq z + 1.$

Az $f_{\geq}(z)$ függvény balról folytonos /2.2/b Ábra folytonos vonal/ és

/2.1/d/ $\quad z \leq f_{\geq}(z) = -[-z] < z + 1.$

Igen fontos közös tulajdonsága ezeknek a függvényeknek,hogy az $f(z) - z$ periodikus egységnyi periodushosszal és ezzel ekvivalensen

/2.2/ $\quad f(z \pm n) = f(z) \pm n \; , \quad n \geq 0$ egész.



2.2. Ábra. Az $f_{<}$, $f_{\leq}$, $f_{>}$, $f_{\geq}$ függvények.

A $\lessdot$ és $\gtrdot$ alternativ relációjelekkel jelölve felirhatók még a következő összefüggések is.

A /2.1/a-d/ ekvivalensek a

$$z-1 \lessdot' f_{\lessdot}(z) \lessdot z\ , \quad z+1\ {}'\!\gtrdot f_{\gtrdot}(z) \gtrdot z$$

relációkkal, továbbá következnek az alábbiak:

$$\begin{array}{lll} & f_{\gtrdot}(z) = f_{\lessdot'}(z) + 1, & f_{\lessdot}(z) = f_{'\gtrdot}(z) - 1 \\ /2.3/ & f_{\gtrdot}(z) = -f_{'\gtrdot}(-z) + 1, & f_{\lessdot}(z) = -f_{\lessdot'}(-z) - 1 \\ & f_{\gtrdot}(z) = -f_{\lessdot}(-z)\ , & f_{\lessdot}(z) = -f_{\gtrdot}(-z)\ . \end{array}$$

Ezeket az összefüggéseket a /2.1/ és /2.2/-vel együtt külön utalás nélkül is gyakran használjuk majd.

Alkalmazzuk még az

$$\omega = /B,A/$$

jelölést a B és A egész számok alkotta vektor jelölésére és legyen definició szerint

$$\begin{array}{ll} \omega = \omega' & \text{ekvivalens } B = B' \text{ és } A = A' \\ \omega \leq \omega' & \text{ekvivalens } B \leq B' \text{ és } A \leq A' \\ \omega < \omega' & \text{ekvivalens } \omega \leq \omega' \text{ és } B < B',\ A < A' \text{ legalább} \end{array}$$

egyike teljesül /részben rendezési reláció/.

Néha használjuk a programozási technikából kölcsönzött

$$x := \varphi(x)$$

jelölést az

$$x = \varphi(x')\ , \quad x' = x$$

változó transzformáció párra, ahol x és x' változók /vektorok/, $\varphi(x)$ egy kifejezés /vektor/ és $x'=x$ az identitás /átjelölés/.

2.2. Általános és standardizált KIF.

Az előző pontban felvetett koincidencia feladatok /KIF/ algebrai formában a következőképpen specifikálhatók. Legyen az X folyam periodushossza $x>0$, az Y folyamé $y>0$. Induljon az Y folyam z-vel "máskor", mint az X /$z>0$ esetén később, $z<0$ esetén előbb/. A három tipikus KIF a következő problémát jelenti.

(α) Van-e olyan $\omega=/B,A/$ pozitiv egész számpár, hogy

(i) $0 \prec_B By + z - Ax \prec_J b$

(ii) $-a \prec_B By + z - Ax \prec_J 0$

(iii) $-c \prec_B By + z - Ax \prec_J c$,

ahol $a,b,c \geq 0$ adott valós számok?

(β) Ha van, melyik az első ilyen $\omega = \omega^*$ számpár?

Ez a három KIF egyaránt speciális esete az alábbi <u>általános KIF-nek</u> /ÁKIF/:

(α) Van-e olyan $\omega=/B,A/\geq\omega_0 \doteq /B_0, A_0/$ egész pár, hogy

/2.4/ $$a \prec_B By + z - Ax \prec_J b,$$

ahol $a \leq b$ adott valósak, B_0, A_0 adott egészek.

(β) Ha van, melyik a minimális $\omega = \omega^*$ megoldás?

Az általános KIF-et az alábbi <u>kilenc paraméter</u> jellemzi:

$$(x, y, z, a, b, \prec_B, \prec_J, B_0, A_0).$$

Vezessük be az $\omega=/B,A/$ egész számpárhoz megadott $x>0$, $y>0$, z valósak esetén a

$$\Delta \doteq \Delta(\omega) \doteq \Delta(B,A) \doteq By + z - Ax$$

mennyiséget, mint kétváltozós egész argumentumú függvényt.

Legyen

$$\hat{\Omega} = \{\omega \mid \omega \geq \omega_o\}$$

a /2.4/-et kielégitő $\omega \geq \omega_o$ egész párok halmaza. Az ÁKIF ekvivalens annak eldöntésével, hogy

(α) $\hat{\Omega} \neq \emptyset$ igaz-e, és ha igen

(β) melyik az $\hat{\Omega}$ minimális ω^* eleme? A feladat egyértelmüségét biztositja a következő lemma.

2.1. Lemma: Az $x > o$, $y > o$ következtében, bármely

$$\hat{\Omega} \neq \emptyset$$

halmaznak van egyértelmü legkisebb eleme, amelyre

$$\omega^* \leq \omega \quad , \quad \omega \in \hat{\Omega} .$$

Bizonyitás: Legyenek

$$B_1 = \min\{B \mid B \geq B_o,\ \exists A: A \geq A_o, \Delta(B,A) \in [a,b]\}$$

$$A_1 = \min\{A \mid A \geq A_o, \Delta(B_1,A) \in [a,b]\}$$

$$A_2 = \min\{A \mid A \geq A_o,\ \exists B: B \geq B_o, \Delta(B,A) \in [a,b]\}$$

$$B_2 = \min\{B \mid B \geq B_o,\ \Delta(B,A_1) \in [a,b]\}.$$

Definició szerint $B_1 \leq B_2$ és $A_2 \leq A_1$.

Ha $B_1 < B_2$ lenne, akkor

$$B_1\, y + z - A_2\, x < B_2 y + z - A_2 x \leq_J b$$

$$B_1\, y + z - A_2\, x \geq B_1\, y + z - A_1 x \ {}_B\!\geq a,$$

vagyis $/B_1, A_2/ \in \hat{\Omega}$ és ellentmond B_2 definiciójának.

Ha $A_2 < A_1$ lenne, akkor

$$B_1\, y + z - A_2 x \leq B_2\, y + z - A_2\, x \leq_J b$$

$$B_1\, y + z - A_2 x > B_1\, y + z - A_1 x \ {}_B \ a,$$

vagyis ellentmondana A_1 definiciójának. Tehát

$B_1 = B_2$ és $A_2 = A_1$
és $\omega^{*} = /B_1, A_1/$ esetén bármely $\omega \in \hat{\Omega}$ elemre vagy $B > B_1$, vagy $A > A_1$ és $\omega \geq \omega^{*}$.

Q.e.d.

E lemmából következik, hogy egy ÁKIF $\omega^{*} = /B^{*}, A^{*}/$ megoldását, ha létezik, az egyik komponense egyértelmüen meghatározza.

Ha A^{*} ismert, akkor a B^{*}-ot az

$$A^{*}x + a \leqslant_B z + y \min_{B \geq B_0} B$$

relációból kaphatjuk meg és

$$B^{*} = \max\left(B_0,\ f_{B \geqslant}\left(\frac{A^{*}x + a - z}{y}\right)\right) =$$

$$= \max\left(B_0,\ -f_{\leqslant B}\left(\frac{z - a - A^{*}x}{y}\right)\right) =$$

$$= \max\left(B_0,\ -f_{\leqslant B}\left(\frac{z - a - (A^{*} - A_0)x - A_0 x}{y}\right)\right) =$$

$$= \max\left(B_0,\ -f_{\leqslant B}\left(\frac{\Delta_0 - a - (A^{*} - A_0)x}{y} - B_0\right)\right) =$$

$$= \max\left(B_0,\ B_0 - f_{\leqslant B}\left(\frac{\Delta_0 - a - (A^{*} - A_0)x}{y}\right)\right) =$$

$$= B_0 + \max\left(0,\ -f_{\leqslant B}\left(\frac{\Delta_0 - a - (A^{*} - A_0)x}{y}\right)\right) =$$

$$= B_0 - \min\left(0,\ f_{\leqslant B}\left(\frac{\Delta_0 - a - (A^{*} - A_0)x}{y}\right)\right) .$$

Itt $\Delta_0 = \Delta/B_0, A_0/ \doteq B_0 y + z - A_0 x$ és a levezetést azért részleteztük, mert mutatja a /2.2/ és /2.3/ összefüggések praktikus használatát.

Hasonlóan kifejezhetjük az A^{*}-ot a B^{*} segitségével a

$$z + yB^{*} \leqslant_J x \min_{A \geq A_0} A + b$$

relációból.

Ezek alapján az alábbi fontos összefüggés-párat irhatjuk fel:

$$/2.5/\qquad \begin{aligned} B^{*} &= B_o - \min/0, f_{\leqslant B}\left(\frac{\Delta_o - a - /A^{*} - A_o/x}{y}\right)/ \doteq \phi_B/A^{*}/,\\ A^{*} &= A_o - \min/0, f_{\leqslant J}\left(\frac{b - \Delta_o - /B^{*} - B_o/y}{x}\right)/ \doteq \phi_A/B^{*}/. \end{aligned}$$

Az általános koincidencia feladatokat két osztályba sorolhatjuk: <u>triviálisan megoldható</u> KIF-ek és <u>standardizálható</u> KIF-ek. A triviálisan megoldható KIF-ek legyenek azok, amelyeknél

$$/2.6/\qquad b - a \geqq \min/x,y/$$

teljesül. Nevezzük standardizálhatónak azokat a KIF-eket, amelyekre

$$/2.6'/\qquad b - a < \min/x,y/$$

teljesül. Nevezzük a /2.4/ alatti KIF-et <u>standardizált</u> KIF-nek /SKIF/, ha abban a paraméterekre az

$$/2.7/\qquad x = 1,\ 0 \leqq b = -a < \tfrac{1}{2}\min/1,y/,\ |z| \leq \tfrac{1}{2}\min/1,y/,\ \omega_o = /0,0/$$

feltételek teljesülnek. Uj szimbolika alkalmazásával a SKIF igy fogalmazható:

$/\alpha/$ Van-e olyan nem-negativ egész /Q,P/ számpár, amelyre

$$/2.8/\qquad -\alpha \leqslant_B Q\xi + \beta - P \leqslant_J \alpha$$

egyenlőtlenség teljesül;

$/\beta/$ Ha van, melyik a minimális $/Q^{*},P^{*}/ \geqq /0,0/$ megoldás?

Definició szerint a /2.8/-ban

$$/2.9/\qquad \xi > 0,\ \alpha < \tfrac{1}{2}\min/1,\xi/,\ |\beta| \leq \tfrac{1}{2}\min/1,\xi/,\ \omega_o = /0,0/\ .$$

A SKIF-et teljesen jellemzi a /2.8/-ban szereplő alábbi <u>öt paraméter</u>:

$$/\xi, \beta, \alpha, \leqslant_B, \leqslant_J/.$$

A 2.1. Lemmából következően a /2.5/ alapján felirhatjuk a SKIF legkisebb $/Q^{*},P^{*}/ \doteq \omega^{*}$ megoldása összefüggését is:

$$/2.10/\qquad \begin{aligned} Q^{*} &= -\min/0, f_{\leqslant B}\left(\frac{\alpha + \beta - P^{*}}{\xi}\right)/,\\ P^{*} &= -\min/0, f_{\leqslant J}(\alpha - \beta - Q^{*}\xi)/. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy ez az összefüggés a /2.8/ alaku egyenlőtlenség minimális $/Q^*,P^*/ \geq /0,0/$ megoldására mindig igaz $\alpha \geq 0$ és β bármely értékére, /2.9/-től függetlenül.

Felépitünk most egy algoritmust, amely megoldja a triviálisan megoldható KIF-et és standardizálja a standardizálható KIF-et.

Vegyük sorra a /2.6/ feltétellel definiált triviálisan megoldható KIF-ek különféle eseteit. Ezek: /i/ $x=0$, /ii/ $b-a=x>0$, /iii/ $b-a=y>0$, /iv/ $b-a>x$, /v/ $b-a>y$.

/i/ eset /x=0/: Az X folyam degenerálódik egyetlen t=0 pontra, amely az $\lceil a,b \rceil$ intervallumot határozza meg. Ha van $z+By$, $B \geq B_0$, amely $\lceil a,b \rceil$-be esik, az első ilyen határozza meg B^*-ot. A^* határozatlan, Ezért legyen $A^* = A_0$. Ha azonban nincs $\lceil a,b \rceil$-be eső $z+By$, $B \geq B_0$, akkor nincsen megoldás. Vagyis

$$/2.11/i/ \quad B^* = \max/B_0, f_{B \geqslant}\left(\frac{a-z}{y}\right)/ = B_0 - \min/0, f_{\leqslant_B}\left(\frac{\Delta_0 - a}{y}\right)/, \quad A^* = A_0,$$

ha

$$B^* \leqslant_J \frac{b-z}{y}$$

teljesül, egyébként nincs megoldás.

/ii/ eset /b-a=x>0/: ha $\leqslant_B$ és $\leqslant_J$ nem mindketten $<$ értéküek, akkor az $\lceil Ax+a, /A+1/x+a \rceil$, $A=0,1,\ldots$ intervallumsorozat az a-tól kezdve teljesen lefedi az időtengelyt, ezért biztosan van olyan, amelybe $z+By$ beleesik és igy van megoldás. Legyen $B' \geq B_0$ a legkisebb egész, amelyre $A_0x+a \leqslant_B z+B'y$, vagyis

$$/2.12/ \quad B' = \max/B_0, f_{B \geqslant}\left(\frac{A_0x+a-z}{y}\right)/ = B_0 - \min/0, f_{\leqslant_B}\left(\frac{\Delta_0 - a}{y}\right)/.$$

Ekkor $B^* = B'$ és $A^* = \Phi_A/B^*/$ a /2.5/ összefüggés szerint.

Ha $\leqslant_B = \leqslant_J = <$, akkor az intervallumok nem fedik le az $Ax+a$, $A=0,1,\ldots$, pontokat és lehetséges, hogy minden $z+By$, $B \geq B_0$, ilyen pontba esik. Ez pontosan akkor következik be, ha y/x és $(a-z)/x$ egészek. Ilyenkor nincs megoldás. Különben a megoldás ugyanaz, mint fent, ha $(z+B'y-a)/x$ nem egész és a megoldás $B^* = B'+1$, $A^* = \Phi_A/B^*/$, ha $(z+B'y-a)/x$ egész. Ezt a megoldást a

$$/2.11/ii/ \quad B^* = B' + 1 - \mathrm{sgn}\left\{\frac{z+B'y-a}{x}\right\}, \quad A^* = \Phi_A/B^*/$$

formulába vonhatjuk össze.

/iii/ eset /b-a=y>0/: Ha $\preccurlyeq_B$ és $\preccurlyeq_J$ nem mindketten $\prec$ értéküek, akkor minden $]Ax+a,\ Ax+b]$, $A=0,1,\dots$, intervallum lefed pontosan egy z+By alaku pontot, ezért biztosan van megoldás. Legyen A' a legkisebb $A' \geq A_0$ egész, amelyre $z+B_0y \preccurlyeq_J A'x+b$, vagyis

$$/2.12'/ \qquad A' = \max/A_0, f_{J\succ}\left(\frac{z+B_0y-b}{x}\right)/ = A_0 - \min/0, f_{\preccurlyeq_J}\left(\frac{b-\Delta_0}{x}\right)/.$$

Ekkor a megoldás $A^* = A'$ és $B^* = \Phi_B/A^*/$ a /2.5/ szerint.

Ha $\preccurlyeq_B = \preccurlyeq_J = \prec$, akkor lehetséges, hogy az $(Ax+a,\ Ax+b)$ intervallumok mind két-két z+By alaku pont közé esnek és nem tartalmaznak ilyen pontot. Ekkor nincs megoldás. Ez pontosan akkor következik be, ha az x/y és a $(z-a)/y$ egészek. Ettől az esettől eltekintve a megoldás ugyanaz, mint fent, ha $A'x+b \neq z+/B_0+1/y$, azaz $(z+B_0y-a)/x$ nem egész, egyébként $A^* = A'+1$ és $B^* = \Phi_B/A^*/$, ha $(z+B_0y-a)/x$ egész. Ezt az

$$/2.11/iii/ \qquad A^* = A'+1-\operatorname{sgn}\left\{\frac{z+B_0y-a}{x}\right\}, \qquad B^* = \Phi_B/A^*/$$

formulába foglalhatjuk össze.

/iv/ eset /b-a>x/: Ekkor az $]Ax+a,\ Ax+b]$, $A=0,1,\dots$, intervallumsorozat teljesen befedi az időtengelyt a-tól kezdve, ezért B^* a minimális $B \geq B_0$, amelyre $A_0x+a \preccurlyeq_B z+B^*y$, amiből

$$/2.11/iv/ \qquad B^* = \max/B_0, f_{B\succ}\left(\frac{A_0x+a-z}{y}\right)/ = B_0 - \min/0, f_{\preccurlyeq_B}\left(\frac{\Delta_0-a}{y}\right)/,$$

$$A^* = \Phi_A/B^*/.$$

/v/ eset /b-a>y/: Ekkor minden $]Ax+a,\ Ax+b]$, $A=0,1,\dots$, intervallum tartalmaz legalább egy z+By alaku pontot, ha $Ax+b>z$. Ezért A^* a minimális $A \geq A_0$, amelyre $z+B_0y \preccurlyeq_J A^*x+b$, amelyből

$$/2.11/v/ \qquad A^* = \max/A_0, f_{J\succ}\left(\frac{z+B_0y-b}{x}\right)/ = A_0 - \min/0, f_{\preccurlyeq_J}\left(\frac{b-\Delta_0}{x}\right)/,$$

$$B^* = \Phi_B/A^*/.$$

Ezzel triviálisan megoldható KIF-ek minden esetére megadtuk a megoldást, vagy kritériumot arra, hogy mikor nem létezik.

Alább eljárást adunk a standardizálható KIF-ek standardizálására. A /2.6/ feltétel kizárja, hogy x=0 legyen. Ezért a /2.4/ reláció végigosztható x-szel. Ezután az igy nyert egyenlőtlenségből vonjuk ki a $(b+a)/2x$ mennyiséget. Ekkora

$$-\frac{b-a}{2x} \leqslant_B B\frac{y}{x} + \frac{2z-a-b}{2x} - A \leqslant_J \frac{b-a}{2x}\,, \qquad \omega \geq \omega_o,$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Bevezetve az

$$\alpha = \frac{b-a}{2x}\,, \qquad \xi = \frac{y}{x}\,, \qquad \beta' = \frac{2z-a-b}{2x}$$

jelöléseket, az egyenlőtlenség a

$$-\alpha \leqslant_B B\xi + \beta' - A \leqslant_J \alpha$$

alakot ölti, ahol

$$\xi > 0 \quad \text{és} \quad \alpha < \frac{1}{2}\min/1,\xi/$$

teljesül a /2.6'/ következtében. Csupán a β' és ω_o nem teljesitik a /2.9/ alatti követelményeket. Az A,B változók transzformációjával azonban ez is elérhető. Legyen $\omega_o' \doteq /B_o', A_o'/ \geq /0,0/$. Ha $/B,A/ \doteq \omega$ eleget tesz a fenti egyenlőtlenségnek és $\omega \geq \omega_o'$, akkor $\omega' = \omega - \omega_o'$ eleget tesz a

$$-\alpha \leqslant_B B'\xi + \beta - A' \leqslant_J \alpha$$

egyenlőtlenségnek és $\omega' \geq /0,0/$, ahol

/*/ $$\beta = \beta' + B_o'\xi - A_o' \doteq \Delta_o'\,.$$

Feladatul tüzzük ki olyan $\omega_o' \leq \omega^*$ keresését, amelyre

$|\beta| \leq \frac{1}{2}\min/1,\xi/$ teljesül.

Legyen $\Delta_0 \doteq B_0\xi + \beta' - A_0$.
Ha $\Delta_0 \geq 0$, akkor legyen

$$\Delta A_0 = \begin{cases} [\Delta_0], & \text{ha } \{\Delta_0\} \leq \frac{1}{2}\min/1,\xi/ \\ [\Delta_0] + 1, & \text{ha } \{\Delta_0\} > \frac{1}{2}\min/1,\xi/. \end{cases}$$

Ebben az esetben

$$\frac{1}{2}\min/1,\xi/ - 1 < \Delta_0 - \Delta A_0 \leq \frac{1}{2}\min/1,\xi/.$$

Biztos, hogy $A^* \geq A_0 + \Delta A_0$, ugyanis $A^* \leq A_0 + \Delta A_0 - 1$ esetén

$$B^*\xi + \beta' - A^* \geq B_0\xi + \beta' - A_0 - \Delta A_0 + 1 = \Delta_0 - \Delta A_0 + 1 =$$

$$= \begin{cases} \{\Delta_0\} + 1 \geq 1 > \alpha, & \text{ha } \{\Delta_0\} \leq \frac{1}{2}\min/1,\xi/ \\ \{\Delta_0\} > \frac{1}{2}\min/1,\xi/ > \alpha, & \text{ha } \{\Delta_0\} > \frac{1}{2}\min/1,\xi/, \end{cases}$$

vagyis nincs $B^* \geq B_0$ megoldás-pár A^*-hoz. Ezért az $A_0' = A_0 + \Delta A_0$ és $P = A - A_0'$ transzformációval $P^* \geq 0$.

Ha $\Delta_0 - \Delta A_0 < 0$, akkor legyen

$$\Delta B_0 = \begin{cases} -\left[\frac{\Delta_0 - \Delta A_0}{\xi}\right], & \text{ha } \left\{\frac{\Delta_0 - \Delta A_0}{\xi}\right\} \leq \frac{1}{2} \\ -\left[\frac{\Delta_0 - \Delta A_0}{\xi}\right] - 1, & \text{ha } \left\{\frac{\Delta_0 - \Delta A_0}{\xi}\right\} > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ebben az esetben

$$-\frac{1}{2}\min/1,\xi/ < \Delta_0 - \Delta A_0 + \Delta B_0\xi \leq \frac{1}{2}\min/1,\xi/.$$

Biztos, hogy $B^* \geq B_0 + \Delta B_0$, ugyanis $B^* \leq B_0 + \Delta B_0 - 1$ esetén

$$B^*\xi + \beta' - A^* \leq /B_0 + \Delta B_0 - 1/\xi + \beta' - A_0 - \Delta A_0 = \Delta_0 - \Delta A_0 + \Delta B_0\xi - \xi =$$

$$= \begin{cases} \left\{\frac{\Delta_0 - \Delta A_0}{\xi}\right\}\xi - \xi \leq -\frac{1}{2}\xi \leq -\frac{1}{2}\min/1,\xi/ \leq -\alpha \text{ ill.} \\ \left\{\frac{\Delta_0 - \Delta A_0}{\xi}\right\}\xi - 2\xi < -\xi < -\alpha \end{cases}$$

aszerint, hogy $\left\{\frac{\Delta_0 - \Delta A_0}{\xi}\right\} \leq \frac{1}{2}$, illetve $> \frac{1}{2}$.

Vagyis nem lehet $A^{*} \geq A_o + \Delta A_o$ megoldáspár ilyen B^{*}-hoz. Ezért a $B' = B_o + \Delta B_o$ és $Q = B - B_o'$ transzformációval $Q^{*} \geq 0$ is teljesül. Bevezetve $\Delta_o' \doteq B_o' \xi + \beta' - A_o'$ jelölést, a /*/ transzformáció szerint $\beta = \Delta_o' = \Delta_o - \Delta A_o + \Delta B_o \xi$, amelyre fentebb láttuk, hogy $|\beta| \leq \frac{1}{2} \min /1, \xi/$.

Legyen most $\Delta_o < 0$. Legyen ekkor

$$\Delta B_o = \begin{cases} -\left[\frac{\Delta_o}{\xi}\right] - 1, & \text{ha } \left(1 - \left\{\frac{\Delta_o}{\xi}\right\}\right)\xi \leq \frac{1}{2} \min /1, \xi/ \\ -\left[\frac{\Delta_o}{\xi}\right], & \text{ha } \left(1 - \left\{\frac{\Delta_o}{\xi}\right\}\right)\xi > \frac{1}{2} \min /1, \xi/. \end{cases}$$

Ekkor

$$-\frac{1}{2} \min /1, \xi/ \leq \Delta_o + \Delta B_o \xi < \xi - \frac{1}{2} \min /1, \xi/ .$$

Ismét könnyü belátni, hogy $B^{*} \leq B_o + \Delta B_o - 1$ nem lehet ΔB_o fenti definiciója mellett. Ezért a $B_o' = B_o + \Delta B_o$ és $Q = B - B_o'$ transzformációval $Q^{*} \geq 0$ teljesül.

Ha $\Delta_o + \Delta B_o \xi > 0$, akkor legyen

$$\Delta A_o = \begin{cases} [\Delta_o + \Delta B_o \xi], & \text{ha } \{\Delta_o + \Delta B_o \xi\} \leq \frac{1}{2} \\ [\Delta_o + \Delta B_o \xi] + 1, & \text{ha } \{\Delta_o + \Delta B_o \xi\} > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ebben az esetben belátható, hogy

$$-\frac{1}{2} \min /1, \xi/ \leq \Delta_o + \Delta B_o \xi - \Delta A_o \leq \frac{1}{2} \min /1, \xi/.$$

Vagyis ismét $|\beta| = |\Delta_o'| \leq \frac{1}{2} \min /1, \xi/$ biztositva van. Hogy $A^{*} \leq A_o + \Delta A_o - 1$ nem lehet, azt könnyü belátni. Ez biztositja, hogy a transzformációk folyamán a legkisebb $/B^{*}, A^{*}/$ megoldást nem zártuk ki és $A_o' = A_o + \Delta A_o$, $P = A - A_o'$ transzformációval $P^{*} \geq 0$ biztositva van.

Transzformációra természetesen nincs szükség, ha eleve $|\Delta_o| \leq \frac{1}{2} \min /1, \xi/$ teljesül, vagy közben bármely ΔA_o vagy ΔB_o eleve 0 lenne. Ezt azonban az egyszerüség kedvéért nem vettük figyelembe. Ezzel a megállapodással együtt célszerü a triviális megoldás és standardizálás algoritmusát formálisan is megfogalmazni. $/A^{*}, B^{*}/ = /-1, -1/$ jelölje megállapodás szerint azt a tényt, hogy egy adott ÁKIF-nek nincsen $\omega^{*} \geq /A_o, B_o/$ megoldása.

K-Algoritmus: Bemenő adatok: $x, y, z, a, b, \preccurlyeq_B, \preccurlyeq_J, B_o, A_o$;

Kimenő adatok: B^{*}, A^{*}, vagy $\xi, \beta, \alpha, B_o', A_o'$;

0.Lépés: $\Delta_o := B_o y + z - A_o x$;

$$B' := B_o - \min/0,\ f_{\preccurlyeq_B}\left(\frac{\Delta_o - a}{y}\right)/;$$

$$A' := A_o - \min/0,\ f_{\preccurlyeq_J}\left(\frac{b-\Delta_o}{x}\right)/;$$

1.Lépés /triviális megoldások/:

Ha $x = 0$, akkor

$B^{*} := B'$, $A^{*} := A_o$, ha $B' \preccurlyeq_J \frac{b-z}{y}$

$B^{*} := A^{*} := -1$ egyébként

és Vége;

Ha $b - a = x$, akkor

$B^{*} := A^{*} := -1$, ha $\preccurlyeq_B = \preccurlyeq_J = <$ és $\left\{\frac{y}{x}\right\} + \left\{\frac{a-z}{x}\right\} = 0$,

$B^{*} := B' + 1$, $A^{*} := \Phi_A/B^{*}/$, ha $\preccurlyeq_B = \preccurlyeq_J = <$ és

$$\left\{\frac{y}{x}\right\} + \left\{\frac{a-z}{x}\right\} > 0 \text{ és } \left\{\frac{z+B'y-a}{x}\right\} = 0,$$

$B^{*} := B'$, $A^{*} := \Phi_A/B^{*}/$ egyébként

és Vége;

Ha $b - a = y$, akkor

$B^{*} := A^{*} := -1$, ha $\preccurlyeq_B = \preccurlyeq_J = <$ és $\left\{\frac{x}{y}\right\} + \left\{\frac{z-a}{y}\right\} = 0$,

$A^{*} := A' + 1$, $B^{*} := \Phi_B/A^{*}/$, ha $\preccurlyeq_B = \preccurlyeq_J = <$ és

$$\left\{\frac{x}{y}\right\} + \left\{\frac{z-a}{y}\right\} > 0 \text{ és } \left\{\frac{z+B_o y-a}{x}\right\} = 0,$$

$A^{*} := A'$, $B^{*} := \Phi_B/A^{*}/$ egyébként

és Vége;

Ha $b - a > x$, akkor $B^{*} := B'$, $A^{*} := \Phi_A/B^{*}/$ és Vége;

Ha $b - a > y$, akkor $A^{*} := A'$, $B^{*} := \Phi_B/A^{*}/$ és Vége;

2.Lépés /standardizálás/:

$$\xi := \frac{y}{x}\ ;\quad \alpha := \frac{b-a}{2x}\ ;\quad \beta := \frac{2z-a-b}{2x}\ ;$$

Ha $\Delta_o < 0$, akkor 3. Lépés;

$$A_o' := A_o + [\Delta_o] \text{, ha } \{\Delta_o\} \leq \frac{1}{2} \min/1, \xi/,$$

$$A_o' := A_o + [\Delta_o] + 1 \text{ egyébként;}$$

Ha $\Delta_o - A_o' + A_o < 0$, akkor

$$B_o' := B_o - \left[\frac{\Delta_o - A_o' + A_o}{\xi}\right] \text{, ha } \left\{\frac{\Delta_o - A_o' + A_o}{\xi}\right\} \leq \frac{1}{2},$$

$$B_o' := B_o - \left[\frac{\Delta_o - A_o' + A_o}{\xi}\right] - 1 \text{ egyébként;}$$

$\beta := \beta + B_o' \xi - A_o'$ és Vége;

<u>3. Lépés /standardizálás/:</u>

$$B_o' := B_o - \left[\frac{\Delta_o}{\xi}\right] - 1 \text{, ha } \left\{\frac{\Delta_o}{\xi}\right\} \geq 1 - \frac{\min/1, \xi/}{2\xi}$$

$$B_o' := B_o - \left[\frac{\Delta_o}{\xi}\right] \text{ egyébként;}$$

Ha $\Delta_o + /B_o' - B_o/\xi > 0$, akkor

$$A_o' := A_o + [\Delta_o + /B_o' - B_o/\xi] \text{, ha } \{\Delta_o + /B_o' - B_o/\xi\} \leq \frac{1}{2}$$

$$A_o' := A_o + [\Delta_o + /B_o' - B_o/\xi] + 1 \text{ egyébként;}$$

$$\beta := \beta + B_o' \xi - A_o'$$

<u>Vége</u>.

A K-Algoritmusba foglalt eljárás igazolja a következő tételt.

<u>2.1.Tétel:</u> Bármely általános koincidencia feladat vagy triviálisan megoldható, vagy standardizálható. A K-Algoritmus szolgáltatja a triviális megoldást, vagy a standardizált koincidencia feladatot.

<u>Bizonyitás:</u> Kész.

Q.e.d.

A 2.1.Tétel biztositja, hogy a K-Algoritmus végrehajtása után már legfeljebb egy SKIF megoldására van szükség az eredeti koincidencia feladat megoldásához. Az eredeti KIF megoldását a SKIF $/Q^*,P^*/$ megoldásából a

$$B^* = Q^* + B'_o \quad , \quad A^* = P^* + A'_o$$

összefüggés szolgáltatja.

Érdemes megemliteni a koincidencia feladat két más interpretációját azon felül, amelyet a 2.1. pontban adtunk. Formálisan igy fogalmazhatunk: a $\xi > 0$, $\alpha \geq 0$, $\leqslant_B$, $\leqslant_J$ és β adott értékei mellett keressük a

$$/2.13/ \qquad -\alpha \leqslant_B B\xi + \beta - A \leqslant_J \alpha$$

egyenlőtlenség legkisebb $/B,A/ \geq /0,0/$ nem-negativ megoldását, ha létezik megoldása. Ez ekvivalens azzal, hogy az $]A-\alpha,\ A+\alpha[$, $A=0,1,2,\ldots$, intervallumok tartalmaznak-e $\beta + B\xi$, $B=0,1,2,\ldots$, alaku pontot és ha igen, melyik az első intervallum-pont pár. Ez a geometriai interpretáció igy is átfogalmazható: a $]\beta + B\xi - \alpha,\ \beta + B\xi + \alpha[$ intervallumok sorozata $/B=0,1,\ldots/$ fed-e le $A=0,1,2,\ldots$ egész pontokat és ha igen, melyik az első intervallum-pont pár. Az intervallumok megfelelő pontjai és az egész pontok egyaránt számtani haladványt alkotnak különböző kezdőtaggal és differenciával.

A KIF másik interpretációja a <u>diofantikus approximáció</u> problémája, speciálisan a <u>racionális közelités</u> feladata. A diofantikus approximáció a

$$z + By - Ax = 0$$

egyenlet $/B,A/$ egész megoldásainak problémájából ered, amely tetszőleges x,y,z valósak mellett nem mindig /általában nem/ létezik. Felmerül a kérdés, hogy létezik-e akármilyen kis $\varepsilon > 0$ értékhez olyan $/B,A/$ egész pár, amelyre az egyenlet helyett a

$$/2.14/ \qquad |z + By - Ax| \leqslant \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesüljön. A /2.14/ egyenlőtlenségnek és az egyenletnek a megoldása exisztenciálisan tisztázott kérdés /l. pl. [P3] /. A /2.13/ koincidencia feladat felfogható a diofantikus approximáció általánositásának. Sőt a 2.1.Tételből következik, hogy bármely ÁKIF a K-Algoritmus segitségével megoldható, vagy visszavezethető egy diofantikus approximáció feladatára. Az approximáció elméletében viszonylag kevés az eredmény további feltétleknek is eleget tevő megoldások meghatározására vonatkozóan. Ismeretesek becslések a legkisebb megoldásra ε függvényében [P3], [K8], [K9], [Szl].

Ütemezési problémáink szempontjából azonban nem a közelitési feladat bármely megoldására, vagy egy korlát alatti megoldására, hanem az első pozitiv megoldásra van szükség. Ez pedig más jellegü feladat, mint általában az approximáció feladata. Az egyenlőtlenség első $/B_o, A_o/$- nál nem-kisebb megoldásának keresése ennek általánositása.

Az első közelités kérdésének megoldását speciális esetekben a lánctörtfejtés szolgáltatja. Ezt a 2.6. pontban mutatjuk meg. Más szükséges esetekben a lánctörtfejtés algoritmusának általánositásai szolgáltatják majd a megoldást. Ezeket az ütemezési feladatok kapcsán fogjuk tárgyalni. Természetesen első közelités keresésének csak akkor van értelme, ha egyáltalán létezik közelitő megoldás. Ezért a következő pontban az exisztenciális kérdéseket tisztázzuk.

2.3. A KIF megoldásának exisztenciája.

A KIF megoldásának exisztenciája a közelitési feladat megoldásának exisztenciáján alapszik, ezért a következő lemma ennek kérdését tisztázza.

2.2. Lemma: $\xi > 0$ esetén a

$$/2.15/ \qquad |\beta + B\xi - A| \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenség mindig megoldható egész /B,A/-ra és végtelen sok pozitiv és negativ megoldása van, ha $\varepsilon > 0$ és ξ irracionális.

$\xi = P/Q$ racionális /P,Q relativ primek, $Q > 0$/ esetben a /2.15/ csak akkor oldható meg tetszőleges kis $\varepsilon > 0$ mellett, ha $\varepsilon = 0$ mellett is megoldható. Ez utóbbi akkor teljesül, ha $\beta = K/Q$ alakú racionális szám. Egy megoldás esetén ekkor is végtelen sok pozitiv és negativ megoldás létezik.

Bizonyitás: Legyen $\varepsilon > 0$ és ξ irracionális.
Definiáljuk az

$$U = f_{\geq}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

egész számot és a

$$\varphi(B) = [U\{B\xi\}], \quad B = o,1,\ldots,U$$

egész sorozatot. Ekkor

$$\frac{1}{U} \leq \varepsilon \quad \text{és} \quad o \leq \varphi(B) \leq U - 1, \; B = o,1,\ldots,U.$$

Az utóbbi miatt van két olyan $B_1 > B_2$ egész a fenti B értékek között, amelyekre

$$\varphi(B_1) = \varphi(B_2)$$

teljesül. Legyen

$$B = B_1 - B_2 > o, \quad A = [B_1\xi] - [B_2\xi] \geq o \quad \text{és}$$
$$B = B_2 - B_1 < o, \quad A = [B_2\xi] - [B_1\xi] \leq o$$

egy pozitiv és egy negativ /B,A/ számpár. Bármelyik esetén

$$|B\xi - A| = |(B_1 - B_2)\xi - ([B_1\xi] - [B_2\xi])| = |\{B_1\xi\} - \{B_2\xi\}| =$$

$$= \frac{1}{U}|U\{B_1\xi\} - U\{B_2\xi\}| = \frac{1}{U}|\varphi(B_1) + \{U\{B_1\xi\}\} - \varphi(B_2) - \{U\{B_2\xi\}\}| < \frac{1}{U} \leq \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy a $B\xi - A$ számok halmaza mind pozitiv, mind negativ B mellett sürü a 0 pontban. Legyen most $/B',A'/$ egy olyan számpár, amelyre $B'\xi - A'$ a 0 ε-sugaru környezetébe esik és $1 \leq |B'| \leq U$. A

$$\Delta' = B'\xi - A'$$

értéke lehet pozitiv, vagy negativ kivánság szerint, de $\Delta' \neq 0$ a ξ irracionális volta miatt. Ezért $0 < |\Delta'| \leq \varepsilon$. Legyen most tetszőleges β valós számra

$$B = -\left[\frac{\beta}{\Delta'}\right]B', \quad A = -\left[\frac{\beta}{\Delta'}\right]A'$$

pozitiv vagy negativ $//B',A'/$ választásának megfelelően/ egész pár. Ekkor

$$|\beta + B\xi - A| = \left|\beta - \left[\frac{\beta}{\Delta'}\right]\Delta'\right| = \left|\left\{\frac{\beta}{\Delta'}\right\}\Delta'\right| < \Delta' \leq \varepsilon .$$

Vagyis a $B\xi - A$ alakú számok $/B,A/$ pozitiv, vagy negativ egész pár esetén is mindenütt sürük a számegyenesen. Ezzel bizonyitásunk irracionális ξ esetére kész.

Legyen most $\xi = P/Q$, ahol $Q > 0$ és P,Q relativ primek. Ekkor bármely $/B,A/$-ra

$$B\xi - A = \frac{BP - AQ}{Q} \doteq \frac{K}{Q}$$

alakú, ahol K egész szám. Vagyis a $B\xi - A$ számok Q nevezőjü tört alakjában irhatók. Ezek egymástól

$$\frac{1}{Q} > 0$$

távolságra vannak a számegyenesen. Ha β nem $\frac{K}{Q}$ alakú, akkor van olyan $\alpha > 0$ sugarú környezete, hogy abba nem esik $\frac{K}{Q}$ alakú szám, igy $\varepsilon < \alpha$ mellett a /2.15/ nem oldható meg. Ha azonban $\beta = \frac{K}{Q}$ alakú, akkor a /2.15/ megoldható $\varepsilon = 0$ mellett is. Ehhez az kell, hogy bármely K egész BP-AQ alakba legyen előállitható. Ha 1 előállitható $B_1P - A_1Q$ alakba, akkor $K = /KB_1/P - /KA_1/Q$ a kivánt alakú előállitás. Legyen $c > 0$ a legkisebb pozitiv egész, amely BP-AQ alakba előállitható és legyen $c = B'P - A'Q$. Definiálja p és r egészeket a

$$P = pc + r, \quad o \leq r < c$$

feltétel. Ebből

$$r = P - pc = P - p(B'P - A'Q) = (1 - pB')P - (-pA')Q$$

a kivánt alakú előállitása r-nek. Ezért $r = o$ lehet csak, vagyis c osztója P-nek. Hasonlóan bizonyitható, hogy c osztója Q-nak is. Mivel P és Q relativ primek, c=1 következik. Vagyis $\beta = \frac{K}{Q}$ esetén /2.15/-nek valóban létezik megoldása. Legyen ez /B,A/. Legyen $B_k = kQ$, $A_k = kP$, $k = o, \pm 1, \pm 2, \dots$ Ekkor a

$$/B + B_k, A + A_k/ \quad , \quad k = o, \pm 1, \pm 2, \dots$$

számpárok mind megoldásai /2.15/-nek, amelyek között végtelen sok pozitiv és végtelen sok negativ van.

Q.e.d.

<u>Megjegyzés</u>: Később szükségünk lesz a lemma bizonyitásához kapcsolódó következő tényre: $\xi = P/Q$, $Q > o$, P,Q relativ primek esetén $\{\ell P/Q\}$, $\ell = o, 1, \dots$, sorozat periodikusan a k/Q, $k = o, 1, \dots, Q-1$, törteken fut végig meghatározott sorrendben. k/Q a $[0,1)$ intervallum osztópontjai. A fentiekből következik, hogy valamely /B,A/ párra BP-AQ=1, amiből $B\frac{P}{Q} - A = \frac{1}{Q}$, azaz $\left\{B\frac{P}{Q}\right\} = \frac{1}{Q}$, valamint $\left\{\ell\frac{P}{Q}\right\}$ alakban minden k/Q, $k = o, 1, \dots, Q-1$, előállitható. Ha azonban $\left\{\ell_k \frac{P}{Q}\right\} = k/Q$, $o \leq k \leq Q-1$, akkor $\ell = \ell_k + rQ$, $r = 0, 1, \dots$, esetén

$$\left\{\ell\frac{P}{Q}\right\} = \left\{\ell_k \frac{P}{Q} + r\right\} = \left\{\ell_\ell \frac{P}{Q}\right\} = \frac{k}{Q},$$

vagyis ugyanaz az érték. Tehát $\left\{\ell \frac{P}{Q}\right\}$ sorozat Q periodushosszal periodikus és egy perioduson belül a k/Q, $o \leq k \leq Q-1$, számok mindegyikét pontosan egyszer veszi fel.

A 2.2. Lemma alapján bizonyitunk egy tételt, amely szükséges és elegendő feltételeket szolgáltat egy KIF megoldásának létezésére. Ehhez természetesen elegendő bizonyitani: a KIF-et jellemző egyenlőtlenségnek van bármilyen nagy /B,A/ megoldása, vagy egyáltalán nincs megoldása.

<u>2.2. Tétel</u>: Adott $\xi>0$, $\alpha \geq 0$, β valósak és $<_B$, $<_J$ mellett a

$$/2.13/ \qquad -\alpha <_B B\xi + \beta - A <_J \alpha$$

egyenlőtlenségnek akkor és csak akkor van megoldása, ha

/a/ ξ irracionális és $\alpha > 0$

/b/ ξ irracionális, $\alpha = 0$ és $\beta = k - \{n\xi\}$ alakú k,n egészekkel

/c/ $\xi = P/Q$ racionális $P,Q > o$ relativ primekkel és a

$$/2.16/ \qquad -\alpha <_B \beta - \frac{K}{Q} <_J \alpha$$

egyenlőtlenségnek van K egész megoldása.

A /b/ eset kivételével /2.13/-nak végtelen sok megoldása és végtelen sok és tetszőlegesen nagy pozitiv megoldása is van.

A /2.16/-nak pontosan akkor van megoldása, ha

$$/2.17/ \qquad f_{<_B}(Q(\alpha+\beta)) + f_{<_J}(Q(\alpha-\beta)) \geq 0.$$

<u>Bizonyitás</u>: Vizsgáljuk meg először az $\alpha = o$ esetet. /2.13/-nak csak akkor lehet megoldása, ha $<_B = <_J = \leq$, különben értelmetlen /ellentmondásos/. Ekkor /2.13/ ekvivalens a

$$B\xi + \beta - A = 0$$

diofantikus egyenlettel. Alkalmazva a $z = [z] + \{z\}$ felbontást, ez az egyenlet ekvivalens a

$$\{B\xi\} + \{\beta\} = A - [B\xi] - [\beta]$$

egyenlettel, vagyis a baloldalnak is egésznek kell lennie. $0 \leq \{z\} < 1$ miatt azonban ez az egész csak 0, vagy 1 lehet. Vagyis az egyenlet ekvivalens a

$$\{B\xi\} = \{\beta\} = 0$$
$$\{\beta\} = 1 - \{B\xi\}$$

alternativ egyenletekkel.

Az első egyenlet csak egész β és racionális ξ esetén állhat fenn. Ekkor azonban $K = \beta Q$ egész megoldása a /2.16/, $\beta - \frac{K}{Q} = o$ egyenletnek. Vagyis /c/ teljesül. A második egyenlet ekvivalens a $\beta = [\beta] + 1 - \{B\xi\}$ egyenlettel, ami azt jelenti, hogy a /b/ feltétel teljesül β-ra. Ha $\xi = P/Q$ racionális, akkor $\{BP/Q\} = k/Q$, amiből $\beta = K/Q$ adódik és igy /2.16/ megoldható. Megforditva, ha $\alpha = 0$ mellett /b/, vagy /c/ teljesül, akkor a /2.13/ átmegy a

$$B\xi + k - \{n\xi\} - A = 0, \text{ illetve } BP - AQ + K = 0$$

egyenletbe. Mindkettőnek van megoldása. Az elsőnek B=n és $A = k + [n\xi]$ megoldása, azonban $B \neq n$ nem lehet megoldás. Ugyanis abból $\{B\xi\} = \{n\xi\}$, $B\xi - n\xi = [B\xi] - [n\xi]$ egész és ξ racionális következne, amit /b/ esetben kizártunk. Vagyis az első egyenletnek egyetlen megoldása van. A második egyenlet megoldásának létezését a 2.2. Lemma bizonyitásában mutattuk meg és /B,A/-val együtt a /B + kQ, A + kP/, $k = \pm 1, \ldots$ is megoldások. Ebből a tétel állitása következik.

Legyen most $\alpha > 0$. Tekintsük a

$$-\alpha < B\xi + \beta - A < \alpha$$

egyenlőtlenséget. Irracionális ξ esetén állitásunk következik a 2.2. Lemma állitásából. Legyen $\xi = P/Q$, $Q > o$, P relativ prímek. Ekkor a /2.13/ átmegy a

$$-\alpha <_B (BP - AQ)/Q + \beta <_J \alpha$$

egyenlőtlenségbe. Mivel a 2.2. Lemmánál bizonyitottuk, hogy a $BP - AQ = -K$-nak mindig van megoldása, a /2.13/ megoldása valóban ekvivalens a /2.16/ megoldhatóságával. A /2.16/ egy K megoldásából azonban a /2.13/ végtelen sok pozitiv és negativ megoldása következik /B+kQ,A+kP/ , $k = o, \pm 1, \ldots$ alakban.

Hátra van még a /2.16/ megoldhatósága és a /2.17/ ekvivalenciájának bizonyitása.

Legyen K a /2.16/ megoldása. Ekkor /2.16/-ból

$$Q(\beta-\alpha) \prec_J K \prec_B Q(\beta+\alpha),$$

ami csak akkor teljesülhet, ha

$$K \leq f_{\prec B}(Q(\beta+\alpha)) \quad \text{és}$$

$$K \geq f_{J\succ}(Q(\beta-\alpha)) = -f_{\prec J}(Q(\alpha-\beta))$$

egyenlőtlenségek egyszerre igazak, amelyből /2.17/ következik. Ha /2.17/ igaz, akkor legyen például

$$K = f_{\prec B}(Q(\beta+\alpha)) \geq -f_{\prec B}(Q(\alpha-\beta)) = f_{B\succ}(Q(\beta-\alpha)).$$

Ekkor egyrészt

$$K \prec_B Q(\beta+\alpha)$$

másrészt

$$K\ {}_J\!\succ Q(\beta-\alpha)$$

vagyis

$$-Q(\beta+\alpha) \prec_B -K \prec_J -Q(\beta-\alpha),$$

ami ekvivalens a /2.16/ egy megoldásával.

Q.e.d.

Érdemes azonnal megjegyezni, hogy a K-Algoritmus szerint két speciális esetben a KIF-nek nincs megoldása. Ez a két eset:

/a/ $2\alpha = 1,\ \prec_B = \prec_J = <,\quad \beta + \frac{1}{2} \equiv \xi \equiv 0 \pmod 1$

/b/ $2\alpha = \xi,\ \prec_B = \prec_J = <,\quad 1 \equiv \beta + \alpha \equiv 0 \pmod{2\alpha}.$

Az /a/ esetben $\xi = P$ egész. Q = 1-gyel a /2.16/ egyenlőtlenség

$$-\frac{1}{2} < \beta - P < \frac{1}{2},$$

amiből $P < \beta + \frac{1}{2} < P + 1$, ami $\beta + \frac{1}{2}$ egész miatt valóban nem megoldás. A /b/ esetben 2α osztója 1-nek, tehát $2\alpha = \frac{1}{Q}$. $\xi = 2\alpha = \frac{1}{Q}$ racionális és a /2.16/ egyenlőtlenség $-\alpha < \beta - \frac{K}{Q} < \alpha$, azaz $0 < \beta + \alpha - \frac{K}{Q} < 2\alpha = \frac{1}{Q}$. Mivel $\beta + \alpha = 2\ell\alpha$, ℓ egész, alakú, $\beta + \alpha = \frac{\ell}{Q}$ és /2.16/ ekvivalens $0 < \ell - K < 1$ egyenlőtlenséggel, ami valóban nem oldható meg K egészre.

A 2.2.Tétel exisztenciális jellegü és nem ad kulcsot a megoldások meghatározásához. Érdemes azonban korolláriumként kiemelni néhány más formáju egyenlőtlenség megoldásának /közelitésének/ az exisztenciáját.

2.1. Korollárium: Tetszőleges $x > 0$, $y > 0$, $a \geq 0$ mellett a homogén /z=0/

$$/2.18/ \qquad |By - Ax| \leqslant a$$

szimmetrikus kétoldali,

$$/2.19/ \qquad 0 \leq By - Ax \leqslant 2a$$

baloldali és

$$/2.20/ \qquad -2a \leqslant By - Ax \leq 0$$

jobboldali koincidencia feladatnak van megoldása, ha

$a > 0$, vagy x és y racionálisan összefüggők,

és ilyenkor végtelen sok pozitiv és negativ megoldása van; és nincs megoldása egyébként /a=0, y/x irracionális eset/, kivéve a /B,A/ = = /0,0/ tiviális megoldást.

Ez a három KIF tipus igen fontos az ütemezési problémáink szempontjából, mert rendszerint ilyenek merülnek fel. Az egyszerübb hivatkozás érdekében nevezzük el ezeket kétoldali, illetve egyoldali /bal-, ill. jobboldali/ KIF-eknek és használjuk a KKIF, ill. EKIF /BKIF ill. JKIF/ röviditéseket. Mindegyik KIF tipusnak két változata van aszerint, hogy $\leqslant = <$ vagy $\leqslant = \leq$. Az utóbbi eseteket nevezzük el megengedő KIF-eknek és KIF helyett MKIF betükombinációval jelezzük. Ha $\leqslant$ nincs specifikálva /vagyis lehet megengedő, vagy nem/, akkor az /M/KIF jelölést használjuk. Igy pl. B/M/KIF legyen a /2.19/ elnevezése. BKIF legyen ugyanaz $\leqslant = <$ relációval és BMKIF $\leqslant = \leq$ relációjellel.

A fenti bármelyik KIF megoldásán a nem triviális, nem-negativ legkisebb megoldást értjük, amely egyértelmü, kivéve az x=y=0 degenerált esetet, amikoris a /B,A/=/1,1/ lehet a megoldás. Ezt a követelményt az $\omega > /0,0/$ relációval fejezzük ki /l. a 2.1.pont jelöléseit/.

2.4. Szabályos lánctörtfejtés.

A lánctörtek elméletének a számok racionális közelitésére vonatkozó eredményeire a koincidencia feladat megoldásához van szükségünk. A lánctörtek elméletével kapcsolatban elsősorban Perron ilyen tárgyú [P4] könyvére támaszkodunk. Szögletes zárójelben közöljük sokszor e könyvbeli tételt, amelyből állitásunk következik, vagy amelynek átfogalmazása az általunk bizonyitott tétel. Egyszerü hivatkozás helyett a legtöbb tételt bizonyitjuk, mert azokra más formában van szükségünk. A különféle összefüggéseket azért foglaljuk össze, hogy az ütemezési probléma tényleges tárgyalásánál az euklideszi algoritmus általánositása alapján nyert összefüggésekkel analógiát teremtsünk.

Általánosan <u>lánctörtnek</u> nevezzük a b_o, a_1, b_1, a_2, b_2,..., a_n, b_n, ... véges vagy végtelen számosságú változóknak, mint <u>elemeknek</u> a

$$/L/ \qquad b_o + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \ddots}}}$$

alakú kifejezését. Az elemek száma szerint a lánctört <u>véges</u> vagy <u>végtelen</u>. Az /L/ helyett használjuk a

$$b_o + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n} + \ldots$$

jelölést is, ahol $\frac{a_n|}{|b_n}$ a lánctört n-edik <u>tagja</u>. b_o a 0-adik tag.

Ha a lánctört az n-edik taggal végződik, N=n+1-tagú lánctörtről beszélünk. Végtelen lánctörtnél legyen $N=\infty$. a_ν a ν-edik <u>résszámláló</u>, b_ν a ν-edik <u>résznevező</u>.

A

$$\xi_\nu = b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \ldots, \qquad 0 \le \nu \le N,$$

lánctörteket az /L/ lánctört <u>teljes hányadosainak</u> nevezzük.

ξ_0 maga az /L/ lánctört. A véges

$$\omega_\nu = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \dots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu}, \qquad 0 \leq \nu < N,$$

lánctörtek az /L/ <u>közelitő törtjei</u>. Formálisan igaz a

$$\xi_\nu = b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \dots + \frac{a_\mu|}{|\xi_\mu}, \qquad 0 \leq \nu < \mu < N,$$

szimbolum.

Bevezetve az

$$A_{-2} = 0, \quad A_{-1} = 1, \quad B_{-2} = 1, \quad B_{-1} = 0$$

$$A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2}, \quad B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2}, \quad 0 \leq \nu < N,$$

kifejezéseket, bizonyithatók az

$$\omega_\nu = \frac{A_\nu}{B_\nu}, \qquad 0 \leq \nu < N,$$

$$A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu = (-1)^{\nu-1} a_1 a_2 \dots a_\nu, \qquad 1 \leq \nu < N,$$

azonosságok. A_ν, B_ν, $-2 \leq \nu < N$ az /L/ lánctört <u>közelitő számlálói</u> ill. <u>közelitő nevezői</u>.

Ha /L/ elemei számok, akkor minden ω_ν véges közelitő tört értéke kiszámitható, feltéve, hogy az utolsó tag nem $\frac{0}{0}$ határozatlan, amikoris ω_ν értékéről beszélni értelmetlen. Ha /L/ véges és az utolsó ω_n nem értelmetlen, akkor $\xi_0 = \omega_n$ az /L/ értéke. Ha /L/ végtelen és az ω_ν, $\nu = 0,1,\dots$ sorozat konvergens, akkor

$$\xi_0 = \lim_{\nu \to \infty} \omega_\nu = \lim_{\nu \to \infty} \frac{A_\nu}{B_\nu}$$

az /L/ értéke. Ha

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{B_\nu}{A_\nu} = 0$$

létezik, akkor /L/ nem lényegesen divergens és $\xi_0 \doteq \infty$ értéket definiáljuk.

<u>Szabályos lánctörtnek</u> nevezzük azt a speciális számelemü lánctörtet, amelynél $a_\nu = 1$, $1 \leq \nu < N$, b_ν, $0 \leq \nu < N$, egészek és b_ν, $1 \leq \nu < N$, pozitivak. A továbbiakban csak szabályos lánctörtekről lesz szó és lánctört alatt ezt értjük. A szabályos lánctörtek jelentősége abban rejlik, hogy minden valós szám

egyértelmüen fejthető szabályos lánctörtbe az u.n. euklideszi algoritmus segitségével. Ez a következőképpen történik.

Ha ξ_o egész b_o, akkor $\xi_o=b_o$ a lánctörtfejtése.

Ha ξ_o nem egész, akkor legyen $b_o=[\xi_o]$ és $r_o=\{\xi_o\}$. Ekkor $\xi_1=\frac{1}{r_o}$. Ha ξ_1 egész b_1, akkor $\xi_o=b_o+\frac{1|}{|b_1}$ a ξ_o lánctört-fejtése. Ha ξ_1 nem egész, a ξ_o-ra végzett eljárást ismételjük. Az algoritmus akkor ér véget, ha valamely n-re $\xi_n=b_n$ egész. Ekkor ξ_o lánctört-fejtése

$$\xi_o=b_o+\frac{1|}{|b_1}+\dots+\frac{1|}{|b_n}.$$

Ha ξ_n nem egész, akkor legyen $b_n=[\xi_n]$, $r_n=\{\xi_n\}$, $\xi_{n+1}=\frac{1}{r_n}$. Ilyenkor $1<\xi_{n+1}<\infty$. Ha a $\xi_o, \xi_1,\dots, \xi_n,\dots$ sorozat egyik tagja sem egész, akkor az algoritmus sosem ér véget és a ξ_o végtelen lánctörtfejtésének egyre nagyobb tagszámú közelitését kapjuk.

A ξ_ν teljes hányadosok és b_ν résznevezők között az alábbi összefüggés van; az euklideszi algoritmus alapja:

$$\xi_\nu=b_\nu+\frac{1}{\xi_{\nu+1}}, \qquad 0\le\nu<N-1,$$

$$\xi_{N-1}=b_{N-1}, \qquad \text{ha N véges.}$$

Célszerü egy ξ_o szám lánctört-fejtésére az euklideszi algoritmus formálisabb megfogalmazása.

E - Algoritmus:

Bemenő adat: ξ_o valós szám, Φ feltétel

Kimenő adat: N tagszám, $b_o, b_1,\dots, b_{N-1}$ résznevezők és $\exists$ jelzés.

1.lépés: N=0; ν=o; $\xi_\nu=\xi_o$;

2.lépés: N=N+1;

Ha ξ_ν egész, akkor $b_\nu = \xi_\nu$ és Vége 1.

Ha ξ_ν nem egész, akkor $\xi_\nu = b_\nu + 1/\xi_{\nu+1}$, b_ν egész, $\xi_{\nu+1} > 1$;

3. Lépés: Ha Φ, akkor ϑ és Vége 2.

Ha nem Φ, akkor $\nu := \nu + 1$ és 2. Lépés.

Vége 3.

A Φ bemenő feltétel olyan, hogy végtelen lánctört esetén is véges lépésen belül igazzá váljék és igy biztositsa az E-Algoritmus befejeződését. ϑ jelzi az ilyen "kényszerbefejezést" a Vége 2. lépésben. Véges lánctörtfejtésnél a teljes tag-sorozattal végződik az algoritmus a Vége 1. lépéssel, ha közben Φ feltétel fel nem lépett. A Vége 3. lépésre sosem kerül sor.

Mivel $\xi_\nu > 1$ mindig teljesül $\nu \geq 1$ esetben, véges lánctörtnél $\xi_n = b_n \geq 2$ lesz. $b'_n = b_n - 1$, $b'_{n+1} = 1$ definicióval irható

$$\xi_n = b'_n + \frac{1|}{|b'_n} ,$$

ahol $b'_n \geq 1$, ezért a

$$\xi_0 = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \dots + \frac{1|}{|b'_n} + \frac{1|}{|b'_{n+1}} ,$$

is szabályos lánctört. A b_n ilyen felbontásával, vagy ennek mellőzésével véges szabályos lánctört tagszámát tetszőleges paritásunak választhatjuk.

A szabályos lánctört jelölésére használjuk az egyszerübb

$$[b_0, b_1, \dots, b_{\nu-1}, b_\nu, \dots] = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ddots \cfrac{1}{b_{\nu-1} + \cfrac{1}{b_\nu + \ddots}}}} \qquad /2.21/$$

jelölést. A közelitő lánctörtek

/2.22/ $\omega_\nu = [b_0, b_1, \dots, b_\nu]$, $\nu = 0,1,\dots$,

a teljes hányadosok

/2.23/ $\xi_\nu = [b_\nu, b_{\nu+1}, \dots]$, $0 \le \nu < N$.

A b_ν, $0 \le \nu < N$, résznevezőket nem-teljes hányadosoknak is nevezik. b_0 kezdőtag kivételével pozitiv egészek. Igazak még $N > 1$ mellett:

/2.24/ $\xi_\nu = [b_\nu, b_{\nu+1}, \dots, \xi_\mu]$, $0 \le \nu < \mu < N$,

/2.25/ $\xi_\nu = b_\nu + \dfrac{1}{\xi_{\nu+1}}$, $0 \le \nu < N-1$,

/2.26/ $b_\nu < \xi_\nu < b_\nu + 1$, $\xi_{\nu+1} > 1$, $0 \le \nu < N-1$.

Minden véges szabályos lánctört egy racionális, minden végtelen szabályos lánctört egy irracionális számot ábrázol értéke: ként, amely mindig létezik [2.6. Tétel]. Minden racionális szám egyértelmüen állitható elő véges szabályos lánctört alakjában /mod 2 előirt tagszámmal is/ [2.3 Tétel]. Minden irracionális szám egyértelmüen végtelen szabályos lánctörtbe fejthető [2.6. Tétel]. A lánctört-fejtést az euklideszi algoritmus szolgáltatja.

Ha ξ_0 racionális szám, akkor ξ_ν, $\nu \ge 1$, is mind racionálisak és $n=N-1$ mellett

$$\xi_{n-1} = b_{n-1} + \frac{1}{\xi_n}, \quad \xi_n = b_n > 1, \quad \text{vagy}$$

/2.27/ $$\xi_n = b_n' + \frac{1}{\xi_{n+1}'}, \quad \xi_{n+1}' = b_{n+1}' \ge 1.$$

Ekkor $n' = n+1$ az n-el ellentett paritású.

Definiáljuk az általános lándtörtekkel analog módon

/2.28/ $A_{-2} = 0$, $A_{-1} = 1$, $B_{-2} = 1$, $B_{-1} = 0$

$$A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + A_{\nu-2}, \quad B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2}, \quad 0 \le \nu < N,$$

egész sorozatokat. ν-re vonatkozó teljes indukcióval könnyen bizonyitható, hogy

/2.29/ $$\omega_\nu = \frac{A_\nu}{B_\nu}, \quad 0 \le \nu < N.$$

Az A_ν, B_ν és ω_ν számokat a /2.21/ lánctört ν-edrendü <u>közelitő számlálójának</u>, <u>nevezőjének</u>, ill. <u>törtjének</u> hivjuk. Bevezetjük még az

/2.3o/ $$A'_\nu = \xi_\nu A_{\nu-1} + A_{\nu-2}, \quad B'_\nu = \xi_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2}, \quad 0 \le \nu < N,$$

mennyiségeket. Igazak az alábbi összefüggések, amelyek egyszerüen bizonyithatók.

/2.31/ $$A'_{\nu+1} = \xi_{\nu+1} A'_\nu, \quad B'_{\nu+1} = \xi_{\nu+1} B'_\nu, \quad 0 \le \nu < N-1,$$

/2.32/ $$\omega_\nu = [b_0, b_1, \dots, b_\nu] = \frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{b_\nu A_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{b_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2}}, \quad 0 \le \nu < N,$$

/2.33/ $$\xi_0 = [b_0, b_1, \dots, b_{\nu-1}, \xi_\nu] = \frac{A'_\nu}{B'_\nu} = \frac{\xi_\nu A_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{\xi_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2}}, \quad 0 \le \nu < N,$$

/2.34/ $$[b_\nu, b_{\nu-1}, \dots, b_1, b_0] = \frac{A_\nu}{A_{\nu-1}}, \quad 0 \le \nu < N,$$

/2.35/ $$[b_\nu, b_{-1}, \dots, b_1] = \frac{B_\nu}{B_{\nu-1}}, \quad 1 \le \nu < N,$$

/2.36/ $$A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu = (-1)^{\nu-1}, \quad 0 \le \nu < N,$$

/2.37/ $/A_\nu, B_\nu/$, $/A_{\nu-1}, A_\nu/$, $/B_{\nu-1}, B_\nu/$ relativ primek, $0 \le \nu < N$,

/2.38/ $$\delta_\nu \doteq \xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{(-1)^\nu}{B_\nu B'_{\nu+1}}, \quad 0 \le \nu < N-1,$$

/2.39/ $$\delta_{\nu+1} - \delta_\nu = \omega_\nu - \omega_{\nu+1} = \frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}} - \frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{(-1)^\nu}{B_\nu B_{\nu+1}}, \quad 0 \le \nu < N-1,$$

/2.4o/ $$|\delta_{\nu+1} - \delta_\nu| = |\delta_{\nu+1}| + |\delta_\nu|, \quad 0 \le \nu < N-1,$$

/2.41/ $$|\delta_{\nu+1} - \delta_\nu| - |\delta_{\nu+2} - \delta_{\nu+1}| = \frac{b_{\nu+2}}{B_\nu B_{\nu+2}} = \frac{1}{B_\nu\left(B_{\nu+1} + \frac{B_\nu}{b_{\nu+2}}\right)}, \quad 0 \le \nu < N-2,$$

/2.42/ $$1 = B_0 \le B_1, \quad B_\nu < B_{\nu+1}, \quad 1 \le \nu < N-1,$$
$$B'_\nu > B_\nu, \quad 0 \le \nu < N-1,$$
$$B'_\nu < B_{\nu+1}, \quad 0 \le \nu < N-2.$$

Ha ξ_0 racionális, akkor $N - 1 = n$ véges, $\xi_n = b_n$ és

/2.43/ $$A'_n = A_n , \quad B'_n = B_n , \quad \xi_0 = \frac{A_n}{B_n} , \quad \delta_n = 0,$$

és mivel /2.37/ következtében A_n/B_n irreducibilis tört, /2.43/ éppen ξ_0 relativ prim hányados előállitása. Ha $\xi_0=P/Q$, $Q>0$, P,Q relativ prim a racionális szám, akkor $A_n=P$, $B_n=Q$. Ha ξ_0 irracionális, akkor is $\omega_\nu=A_\nu/B_\nu$, $0 \leq \nu < \infty$, annak racionális közelitései és irhatjuk általánosan, hogy

/2.44/ $$\xi_0 = \lim_{\nu \to N-1} \omega_\nu = \lim_{\nu \to N-1} \frac{A_\nu}{B_\nu} .$$

/2.38/ és /2.42/ alapján

/2.45/ $$\delta_\nu = \frac{1}{B_\nu B'_{\nu+1}} = \frac{\varepsilon_\nu}{B_\nu B_{\nu+1}} = \frac{\varepsilon^*_\nu}{B^2_\nu} , \text{ ahol}$$
$$0 < |\varepsilon_\nu| < 1, \quad 0 < |\varepsilon^*_\nu| < 1, \quad 0 \leq \nu < N-2$$

és N-1 = n véges esetben

/2.46/ $$\delta_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{B_{n-1}B_n} = \frac{\varepsilon^*_{n-1}}{B^2_{n-1}} , \text{ ahol } 0<|\varepsilon^*_{n-1}| < 1.$$

Vezessük be az $\omega_\nu = A_\nu/B_\nu$, $0 \leq \nu < N$, elemekkel az

$$\Omega^* \doteq \{\omega_\nu \,|\, 0 \leq \nu < N\}$$

halmazt. Nevezzük ezt a főközelitések halmazának.

Speciálisan, ha $\xi_0=b_0$ egész, $\Omega^* = \left\{\frac{b_0}{1}\right\}$ egyelemü, ha $\xi_0 = b_0 + \frac{1}{b_1}$ akkor $\Omega^* = \left\{\frac{b_0}{1}, \frac{b_1 b_0+1}{b_1}\right\}$ kételemü halmaz és $N>2$ esetén $\Omega^* = \left\{\frac{b_0}{1}, \frac{b_1 b_0+1}{b_1},\ldots\right\}$, és első két eleme 1 nevezőjü, ha $b_1=1$.

/2.38/ szerint az $\omega_\nu = A_\nu/B_\nu$ közelitő törtek váltakozva kisebbek, illetve nagyobbak ξ_0-nál: páros ν-re kisebbek, páratlan ν-re nagyobbak. Bármely egymást követő két ω_ν, $\omega_{\nu+1}$, $0 \leq \nu < N-1$, közrefogja ξ_0-t és a közrefogó intervallum hossza /2.39/ szerint $|\delta_{\nu+1} - \delta_\nu| = 1/B_\nu B_{\nu+1}$, amely /2.42/ következtében monoton csökken.

A csökkenés $\nu \to \nu + 1$ lépésnél /2.41/ szerint annál nagyobb, minél nagyobb $b_{\nu+2}$ nem-teljes hányados, azaz $\xi_{\nu+2}$ teljes hányados.

A /2.38/ közelités hibája /2.26/ és /2.27/ alapján alulról is becsülhető és

$$/2.47/ \quad |\delta_\nu| = \frac{1}{B_\nu B'_{\nu+1}} > \frac{1}{B_\nu[(b_{\nu+1}+1)B_\nu + B_{\nu-1}]} = \frac{1}{B_\nu(B_{\nu+1}+B_\nu)}, \quad 0 \leq \nu < N-1.$$

Az ω_ν, $0 \leq \nu < N$, főközelitések a $\beta = 0$ esetben a koincidencia-feladatok megoldásában elsőrendü szerepet fognak játszani. Szükségünk lesz azonban a lánctört-fejtésből származtatott további közelitésekre is, amelyeket alább vezetünk be.

$b_\nu > 1$ esetén legyenek

$$/2.48/ \quad \omega_{\nu,c} \doteq \frac{A_{\nu,c}}{B_{\nu,c}} \doteq \frac{cA_{\nu-1}+A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}}, \quad 0 < c < b_\nu, \quad 1 \leq \nu < N$$

a ξ_0 <u>mellék-közelitései.</u> Legyen

$$/2.49/ \quad \Omega \doteq \Omega^* \cup \{\omega_{\nu,c} \mid 0 < c < b_\nu, \ 1 \leq \nu < N\}$$

a ξ_0 <u>közelitéseinek halmaza.</u> A /2.29/ jelölést és a /2.48/ definiciót kiterjeszthetjük úgy, hogy $\nu = -2, -1$, ill. $c = 0$ és b_ν értékekre is értelmezve legyen.

Ekkor

$$/2.5o/ \quad \begin{array}{lll} \omega_{-2} = \frac{0}{1}, \ \omega_{-1} = \frac{1}{0}, & & \\ \omega_{\nu,0} = \omega_{\nu-2}, & & 0 \leq \nu < N, \\ \omega_{\nu,b_\nu} = \omega_\nu, & & 0 \leq \nu < N, \\ \omega_{0,c} = \frac{c}{1}, & & 0 \leq c \leq b_0. \end{array}$$

Az $\omega_{\nu,c}$ szimbolum, értelemszerüen, bármelyikét jelölheti az $A_{\nu,c}/B_{\nu,c}$ szimbolumnak, e hányados értékének, és a $/B_{\nu,c}, A_{\nu,c}/$ egész számpárnak. Mint érték legyen $\omega_{-1} = \frac{1}{0} = \infty$.

Az $\omega_{\nu,c}$, $0 < c < b_\nu$, értékek mind az $\omega_{\nu,0} = \omega_{\nu-2}$ és $\omega_{\nu,b_\nu} = \omega_\nu$ értékek közé esnek és monoton közelednek $\omega_{\nu-2}$ felől ω_ν felé. Ezek mindnyájan a ξ_0 azonos oldalán helyezkednek el és $\omega_{\nu,c}$ c növekedésével monoton közelit ξ_0-hoz.

Könnyen igazolhatók a következő összefüggések:

/2.51/ $\omega_{\nu,c_1}-\omega_{\nu,c_2}=\dfrac{(-1)^{\nu}(c_1-c_2)}{B_{\nu,c_1}B_{\nu,c_2}}$, $0\leq c_1,c_2\leq b_\nu$, $0\leq\nu<N$,

/2.52/ $\delta_{\nu,c}\doteq\xi_o-\omega_{\nu,c}=\dfrac{(-1)^{\nu}(\xi_\nu-c)}{B'_\nu B_{\nu,c}}$, $0<c\leq b_\nu$, $0\leq\nu<N$,

/2.53/ $A_{\nu-1}B_{\nu,c}-A_{\nu,c}B_{\nu-1}=(-1)^{\nu}$.

Ez utóbbi következtében

/2.54/ $/A_{\nu,c},B_{\nu,c}/$, $/A_{\nu,c},A_{\nu-1}/$, $/B_{\nu,c},B_{\nu-1}/$ relativ primek

és

/2.55/ $\omega_{\nu-1}-\omega_{\nu,c}=\dfrac{(-1)^{\nu}}{B_{\nu-1}B_{\nu,c}}$, $0\leq c\leq b_\nu$, $0\leq\nu<N$.

A /2.38/ és /2.52/ figyelembevételével ebből

$$|\omega_{\nu-1}-\omega_{\nu,c}|=|\xi_o-\omega_{\nu-1}|+|\xi_o-\omega_{\nu,c}|$$

ezért minden $o\leq\nu<N$ mellett az

$$\omega_{\nu-1} \text{ és } \omega_{\nu,c}\ ,\quad 0\leq c\leq b_\nu$$

a ξ_o ellentétes oldalán helyezkednek el.

Szükségünk lesz még a könnyen igazolható

/2.56/
$$B_{\nu-1}<B_{\nu,c}<B_\nu\ ,\quad 0<c<b_\nu\ ,\quad 2\leq\nu<N,$$
$$B_{-1}<B_{o,c}=B_o\ ,\quad 0<c\leq b_o\ ,$$
$$B_o<B_{1,c}<B_1\ ,\quad 0<c<b_1\ ,\text{ ha } b_1>1,$$

/2.57/ $B_{\nu,c-1}<B_{\nu,c}$, $1\leq c\leq b_\nu$, $1\leq\nu<N$,

/2.58/ $|\delta_{\nu-2}|>|\delta_{\nu,c}|>|\delta_\nu|$, $0<c<b_\nu$, $0\leq\nu<N$,

/2.59/ $|\delta_{\nu,c-1}|>|\delta_{\nu,c}|$, $1\leq c\leq b_\nu$, $1\leq\nu<N$,

/2.60/ $|\delta_{\nu-1}|>|\delta_\nu|$, $0\leq\nu<N$,

egyenlőtlenségekre.

Legyen $\bar{c}_o = b_o$, ha $b_1 > 1$, és jelölje

$$\bar{c}_\nu \,,\quad 0 < \bar{c}_\nu \leq b_\nu \,,\quad 1 \leq \nu < N,$$

azt a legkisebb c indexet, amelyre még a

$$/2.61/ \qquad |\delta_\nu| \leq |\delta_{\nu,\bar{c}}| < |\delta_{\nu-1}| \,,\quad \bar{c}_\nu \leq \bar{c} \leq b_\nu \,,$$

egyenlőtlenség teljesül. Vezessük be az alábbi három rendezett halmazt:

$$\Omega^- = \{\omega_i^- | i=1,2,\dots\} = \{\omega_{o,b_o}, \omega_{2,1}, \dots, \omega_{2,b_2}, \dots, \omega_{2k,1}, \dots, \omega_{2k,b_{2k}}, \dots\}$$

$$\Omega^+ = \{\omega_i^+ | i=1,2,\dots\} = \{\omega_{1,1}, \dots, \omega_{1,b_1}, \omega_{3,1}, \dots, \omega_{3,b_3}, \dots, \omega_{2k+1,1}, \dots\}$$

$$\Omega^\pm = \{\omega_i^\pm | i=1,2,\dots\} = \{\omega_{o,b_o} | b_1 > 1\} \cup \{\omega_{\nu,\bar{c}} | \bar{c}_\nu \leq \bar{c} \leq b_\nu, \nu = 1,2,\dots\}.$$

Az $\Omega^- \subset \Omega$ halmaz tartalmazza ξ_o <u>baloldali</u> közelitéseit, az $\Omega^+ \subset \Omega$ halmaz tartalmazza ξ_o <u>jobboldali</u> közelitéseit növekvő nevezők szerint rendezve. ω_i^-, ill. ω_i^+, $i=1,2,\dots$ monoton közelednek ξ_o felé balról ill. jobbról. Mindkét halmaz 1 nevezőjü törttel kezdődik; Ω^- a $\frac{b_o}{1} = \omega_o$ főközelitő törttel, Ω^+ pedig a $\frac{b_o+1}{1}$ törttel, amely az ω_1 főközelitő tört, ha $\omega_1=1$, különben az $\omega_{1,1} \neq \omega_1$ mellék közelitő tört. A következő elem - ha van - nevezője 1-nél nagyobb mindegyik halmazban. Véges $N-1=n$ esetén valamelyik halmaz tartalmazza a $\xi_o = \omega_n$ elemet, amely tekinthető egyformán bal- és jobboldali közelitésnek is. Legyenek Ω_o^- és Ω_o^+ az ω_n-nel kiegészitett halmazok.

$$\Omega^- \cup \Omega^+ = \Omega_o^- \cup \Omega_o^+ = \Omega, \quad \Omega^- \cap \Omega^+ = 0, \quad \Omega_o^- \cap \Omega_o^+ = \{\omega_n\} \,.$$

Az $\Omega^\pm$ halmaz olyan közelitéseket tartalmaz, amelyek távolsága ξ_o-tól monoton csökken és egyben növekvő nevezővel rendelkeznek. $\Omega^\pm \subset \Omega$ és általában szükebb Ω-nál. Csak akkor tartalmazza $\omega_{o,b_o} = \omega_o$ elemet, ha $b_1 > 1$.

Definiáljuk még a

$$/2.62/ \qquad \Delta_\nu = B_\nu \xi_o - A_\nu \,,\qquad -2 \leq \nu < N$$

és

/2.63/ $$\Delta_{\nu,c} = B_{\nu,c}\xi_o - A_{\nu,c}\ , \quad 0 \le c \le b_\nu\ , \quad 0 \le \nu < N,$$

kifejezéseket. $B_{\nu,c} \geq 0$ miatt $\Delta_{\nu,c}$ előjele egyezik $\delta_{\nu,c}$ előjelével. E mennyiségekkel kapcsolatban $\omega_{\nu,c} = /B_{\nu,c}\ ,\ A_{\nu,c}/$ vektort jelöl. Korábbi formulák következményei a

/2.64/ $$\Delta_\nu = \frac{(-1)^\nu}{B'_{\nu+1}}\ , \quad 0 \le \nu < N,$$

/2.65/ $$\Delta_{\nu,c} = \frac{(-1)^\nu(\xi_\nu - c)}{B'_\nu}\ , \quad 0 < c \le b_\nu\ , \quad 0 \le \nu < N,$$

formulák és igazolhatók a

/2.66/ $$|\Delta_{\nu-2}| > |\Delta_{\nu,c}| > |\Delta_{\nu-1}|\ , \quad 0 < c < b_\nu\ , \quad 1 \le \nu < N,$$

/2.67/ $$|\Delta_{\nu,c-1}| > |\Delta_{\nu,c}|\ , \quad 1 \le c \le b_\nu\ , \quad 1 \le \nu < N,$$

relációk. /2.66/ alól kivétel a

/2.66'/ $$|\Delta_{1,1}| = |\Delta_o|\ , \quad \text{ha } \xi_1 = 2,$$

eset.

2.5. Legjobb közelitések és közelitő megoldások.

A ξ_0 szám Ω közelitései segitségével megoldhatók azok a speciális koincidencia feladatok, amelyek /2.18/ - /2.2o/ alakba irhatók fel. A

$$B\xi_0 - A = 0 \tag{2.68}$$

egyenletnek akkor és csak akkor van nem triviális /B,A/ egész megoldása, ha ξ_0 racionális [P4]. Akármilyen ξ_0 esetén bármely /B,A/-ra, $B>0$, vagy

$$B\xi_0 - A \geq 0\,, \tag{2.69}$$

vagy

$$B\xi_0 - A \leq 0\,. \tag{2.70}$$

A /2.69/ tulajdonságú /B,A/, $B>0$, számpárokat baloldali, a /2.7o/ tulajdonságúakat jobboldali közelitő megoldásoknak nevezzük az A/B bal, illetve jobboldali közelitésektől való megkülönböztetés céljából. Hamarosan látjuk, hogy a megkülönböztetés szükséges.

Az ω=A/B törtet, ahol

/2.71/ $B > 0$, A,B relativ primek

a ξ_0 legjobb egy - /bal-, ill. jobb-/ oldali közelitésének nevezzük, ha bármely az A/B és ξ_0 közé eső /határokat is beleértve/ A/B-től különböző P/Q törtre

$$|Q| > B \tag{2.72}$$

következik. Az A/B törtet a /2.71/ feltétel mellett a ξ_0 legjobb közelitésének nevezzük, ha bármely tőle különböző P/Q törtre, amelynél

$$\left|\xi_0 - \frac{P}{Q}\right| \leq \left|\xi_0 - \frac{A}{B}\right| \tag{2.73}$$

fennáll, a /2.72/ következik.

Az ω= /B,A/ egész párat a /2.71/ feltétel mellett a ξ_0-hoz <u>legjobb egy- /bal-</u>, ill. <u>jobb-/ oldali közelitő megoldásnak</u> nevezzük, ha bármely /Q,P/ $\neq$ /B,A/, Q $>$0, számpárra a

$$/2.74/ \qquad \operatorname{sgn} /Q\xi_0 - P/ = \operatorname{sgn} /B\xi_0 - A/$$

$$/\, Q\xi_0 - P \geq 0, \text{ ill. } Q\xi_0 - P \leq 0\, /$$

feltétel mellett a

$$/2.75/ \qquad |Q\xi_0 - P| \leq |B\xi_0 - A|$$

relációból a /2.72/ következik. Az ω=/B,A/ a /2.71/ feltétel mellett a ξ_0-hoz <u>legjobb közelitő megoldás</u>, ha bármely /Q,P/$\neq$ /B,A/ mellett /2.75/-ből /2.72/ következik.

A rövidebb irásmód kedvéért a most definiált fogalmakra vezessük be a LEK,/LBK,LJK/, LK és LEKM,/LBKM,LJKM/, LKM jelöléseket. E definiciók lényege az, hogy egy ω akkor legjobb közelités vagy közelitő megoldás, ha bármely más nem rosszabb közelités ill. közelitő megoldás nevezője ill. első komponense nagyobb. Hincsin [K9] a közelités és közelitő megoldás fogalmára az I. ill. II. tipusú közelités elnevezést használja.

A fenti definiciókból következik, hogy ha ω =A/B LEK, ill. LK és $|Q|\leq$B, akkor biztosan

$$/2.76/ \qquad \left|\xi_0 - \frac{P}{Q}\right| > \left|\xi_0 - \frac{A}{B}\right|$$

és ha ω= /B,A/ LEKM vagy LKM és $|Q|\leq$ B, akkor biztosan

$$/2.76'/ \qquad |Q\xi_0 - P| > |B\xi_0 - A| .$$

A LK és LKM meghatározásához alapvető a következő lemma:

2.3. Lemma: Legyen $\omega_{v,c} \in \Omega$, és /Q,P/ egészek, amelyekre

/2.77/ $$0 < Q \le B_{v,c}$$

$$P/Q \ne \omega_{v,c} \quad , \quad P/Q \ne \omega_{v-1}.$$

Ekkor $1 \le c \le b_v$, $1 \le v < N$ mellett

/2.78/ $$|Q\xi_0 - P| \ge |B_{v,c-1}\xi_0 - A_{v,c-1}| > |B_{v,c}\xi_0 - A_{v,c}| .$$

Bizonyitás: A /2.78/ alatti második egyenlőtlenség azonos /2.67/-tel, csak az első relációt kell igazolni. Legyen

/2.79/ $$P = MA_{v,c} + NA_{v,c-1} \;, \quad Q = MB_{v,c} + NB_{v,c-1}$$

egy egyenletrendszer M,N ismeretelenekre. Ennek determinánsa a /2.36/ felhasználásával

$$A_{v,c}B_{v,c-1} - A_{v,c-1}B_{v,c} = \pm 1$$

egésznek adódik; létezik egyértelmü megoldás, amely egész.
A /2.79/ felhasználásával

/2.8o/ $$Q\xi_0 - P = M/B_{v,c}\xi_0 - A_{v,c}/ + N/B_{v,c-1}\xi_0 - A_{v,c-1}/$$

egy azonosság kell hogy legyen.

Az $M \le 0$, $N \le 0$ lehetetlen /2.79/ és $Q > 0$ miatt.

Az $M > 0$, $N > 0$ kizárt, mert /2.79/-ből $Q > B_{v,c}$ ellentmondana /2.77/-nek.

Az $N = 0$ esetén $P/Q = A_{v,c}/B_{v,c}$ ismét ellentmondana /2.77/-nek.
Tehát $N \ne 0$ és M,N különböző előjelüek.

Ha M=0, akkor /2.79/-ből és $Q > 0$-ból $N \ge 1$ és /2.8o/-ból

$$|Q\xi_0 - P| = N|B_{v,c-1}\xi_0 - A_{v,c-1}| \ge |B_{v,c-1}\xi_0 - A_{v,c-1}|,$$

amit állitottunk.

Legyen most $MN < 0$. Mivel

$$B_{v,c}\xi_0 - A_{v,c} = B_{v-1}\xi_0 - A_{v-1} + B_{v,c-1}\xi_0 - A_{v,c-1} \,,$$

ezért /2.8o/-ból

/2.81/ $$Q\xi_o - P = M/B_{\nu-1}\xi_o - A_{\nu-1}/ + /M+N//B_{\nu,c-1}\xi_o - A_{\nu,c-1}/.$$

$M+N=0$ nem lehet mert akkor /2.81/-ből az $A_{\nu-1}$, $B_{\nu-1}$ relativ prim volta következtében $P/Q = A_{\nu-1}/B_{\nu-1}$ ellentmondana feltevésünknek, /2.77/-nek.

Ha $M>0$, $N<0$, akkor $M>|N|$ nem lehet, mert /2.79/-ből $B_{\nu,c} = B_{\nu-1} + B_{\nu,c-1}$ felhasználásával

$$Q = MB_{\nu,c} - |N|B_{\nu,c-1} = /M - |N|/B_{\nu,c} + |N|B_{\nu-1} > B_{\nu,c}$$

adódna /2.77/-tel ellentétben. Ha viszont $M<|N|$, akkor /2.81/ jobb oldalán mindkét tag azonos előjelü, hiszen $\Delta_{\nu-1}$ és $\Delta_{\nu,c-1}$ ellentétes előjelüek és M és M+N úgyszintén. Ezért /2.81/-ből

$$|Q\xi_o - P| = M|B_{\nu-1}\xi_o - A_{\nu-1}| + |M + N||B_{\nu,c-1}\xi_o - A_{\nu,c-1}| \geq$$
$$\geq |B_{\nu,c-1}\xi_o - A_{\nu,c-1}| ,$$

amint állitottuk.

Ha végül $M<0$, és $N>0$, akkor $|M|>N$ lehetetlen, mert /2.79/-ből $Q<0$ adódna. Ha viszont $|M|<N$, akkor /2.81/ jobboldalán ismét azonos előjelü tagok állnak és

$$|Q\xi_o - P| = |M||B_{\nu-1}\xi_o - A_{\nu-1}| + /M + N/|B_{\nu,c-1}\xi_o - A_{\nu,c-1}| \geq$$
$$\geq |B_{\nu,c-1}\xi_o - A_{\nu,c-1}| ,$$

amint állitottuk /2.78/ alatt.

Q.e.d.

Ez a lemma általánositása a következő lemmának [2.17. Tétel] .

<u>2.4. Lemma</u>: Legyen $\omega_\nu \in \Omega^*$ és /Q,P/ egészek, amelyekre

/2.82/ $$0 < Q \leq B_\nu , \quad P/Q \neq \omega_\nu .$$

Ekkor $1 \leq \nu < N$ mellett

/2.83/ $$|Q\xi_0 - P| \geq |B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}| > |B_\nu\xi_0 - A_\nu|$$

és $\nu=0$ mellett

/2.83'/ $$|Q\xi_0 - P| \begin{cases} > |B_0\xi_0 - A_0| & \text{ha } N=1 \vee P/Q \neq b_0+1 \vee \xi_1 > 2 \\ = |B_0\xi_0 - A_0| & \text{ha } N>1 \wedge P/Q = b_0+1 \wedge \xi_1 = 2 \\ < |B_0\xi_0 - A_0| & \text{ha } N>1 \wedge P/Q = b_0+1 \wedge 1 < \xi_1 < 2. \end{cases}$$

Vagyis a

$$|Q\xi_0 - P| \leq |B_\nu\xi_0 - A_\nu|$$

reláció csupán $N>1$ és $\xi_1 < 2$ esetén állhat fenn $\nu=0$ és $P/Q=b_0+1$ speciális értékek mellett.

<u>Bizonyitás</u>: Az utolsó mondat csupán a /2.83'/ átfogalmazása, nem szorul külön bizonyitásra.

$c = b_\nu$, $1 \leq \nu < N$ mellett a 2.3. Lemma szerint

/2.82/ esetén $P/Q \neq \omega_{\nu-1}$ mellett

$$|Q\xi_0 - P| \geq |B_{\nu,b_\nu-1}\xi_0 - A_{\nu,b_\nu-1}| = |\Delta_{\nu,b_\nu-1}| .$$

/2.66/ szerint azonban $|\Delta_{\nu,b_\nu-1}| > |\Delta_{\nu-1}|$ kivéve a $\nu=1$, $\xi_1=2$ esetet, amikor a /2.66'/ szerint $|\Delta_{1,1}| = |\Delta_0|$. A $P/Q = \omega_{\nu-1}$ értéknél nyilván $|Q\xi_0 - P| = |\Delta_{\nu-1}| = |B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}|$. Vagyis a /2.83/ első relációja bizonyitva van. Azonban /2.66/-ból $1 \leq \nu < N$ mellett $|\Delta_{\nu-2}| > |\Delta_{\nu-1}|$, amely bizonyitja a /2.83/ második egyenlőtlenségét.

$\nu=0$ mellett /2.82/ ekvivalens a $Q=1$, $P \neq b_0$ feltétellel. Ha $P \leq b_0 - 1$, vagy $P \geq b_0 + 2$, akkor $|Q\xi_0-P| = |\xi_0-P| \geq 1 = |\Delta_{-1}| > |\Delta_0|$. Egyedül a $P/Q = (b_0+1)/1$ eset van még hátra. Ha $N=1$, vagyis $\xi_0 = b_0$ egész, akkor /2.83'/ jobboldala 0, tehát

$P/Q \neq b_o/1$ mellett /2.83'/ igaz. $\xi_o \neq b_o$ esetén

$$|Q\xi_o - P| = b_o + 1 - \xi_o = 1 - 1/\xi_1 > 1/\xi_1 = \xi_o - b_o = |B_o\xi_o - A_o|$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $\xi_1 > 2$. $1 - 1/\xi_1 = 1/\xi_1$ akkor, ha $\xi_1 = 2$ /$\xi_o = b_o + \frac{1}{2}$ alaku/ és végül $1 - 1/\xi_1 < 1/\xi_1$, ha $1 < \xi_1 < 2$. Ezzel /2.83'/ is teljesen bizonyitva van.

Q.e.d.

A lemma élesen mutatja a ξ_o lánctört-fejtésének specialitását a $\xi_o = b_o$ egész és $\xi_o = b_o + \frac{1}{2}$ alaku számokra, vagyis amikor

$$\xi_o \equiv 0 \quad / \bmod \tfrac{1}{2} /.$$

A $\xi_o = b_o$ esetben minden közelitési probléma elesik. A $\xi_o = b_o + \frac{1}{2}$ esetben $\Omega = \left\{ \frac{b_o}{1}, \frac{b_o+1}{1}, \frac{2b_o+1}{2} \right\}$ a három közelités, azonban az első kettő nem lehet sem LK, sem LKM mert azonos nevezőjü egyformán közelitő két tört egyike sem legjobb.

A következő tétel azt a fontos tényt rögziti, hogy a legjobb egyoldali közelitő megoldások pontosan az összes közelitések nevezője és számlálója alkotta egész számpárok halmaza. Ez tehát a közelitések egy specifikus tulajdonsága.

2.3. Tétel: Ω éppen a LEKM-ok halmaza, Ω_0^- a LBKM-ok, Ω_0^+ a LJKM-ok halmaza.

Bizonyitás: $1 \leq c \leq b_\nu$, $1 \leq \nu < N$ mellett a 2.3. Lemma szerint a $B_{\nu,c}$-nél nem nagyobb Q-ra bármely P-nél

$$|Q\xi_0 - P| \geq |B_{\nu,c-1}\xi_0 - A_{\nu,c-1}| = |\Delta_{\nu,c-1}|,$$

ami alól egyetlen kivétel a $P/Q = \omega_{\nu-1}$, azaz a $/Q,P/ = /MB_{\nu-1}, MA_{\nu-1}/$ számpárok $/M \neq 0$ egész/. Ezekre azonban

$$MB_{\nu-1}\xi_0 - MA_{\nu-1} = MB_{\nu-1}\delta_{\nu-1}$$

éppen ellentétes előjelü a

$$B_{\nu,c}\xi_0 - A_{\nu,c} = B_{\nu,c}\delta_{\nu,c}$$

mennyiséggel, tehát /2.74/ nem teljesül. A /2.74/ definiciós követelmény esetén tehát /2.78/ mindig teljesül. A /2.67/ folytán ekkor

$$|Q\xi_0 - P| > |\Delta_{\nu,c}|,$$

tehát $\omega_{\nu,c}$, $1 \leq c \leq b_\nu$, $1 \leq \nu < N$ valóban LEKM.
Meg kell még vizsgálnunk az $\omega_0 \in \Omega$ elemet. Mivel $\omega_0 = [\xi_0]$ mindig baloldali közelités és közelitő megoldás és a $(b_0+1)/1$ jobboldali, ezért a $P/Q = (b_0+1)/1$ törttel szemben nem kell ω_0 pontosságát ellenőrizni. Ekkor viszont a 2.4. Lemma szerint $|Q\xi_0 - P| > |B_0\xi_0 - A_0|$ fennáll, tehát ω_0 LBKM. Vagyis valóban Ω_0^- elemei LBKM-ok, Ω_0^+ elemei LJKM-ok és igy Ω elemei LEKM-ok. Bizonyitandó, hogy csak ezek.

Legyen A/B egy LBKM. Tegyük fel, hogy $A/B \notin \Omega_0^-$. Mivel /B,A/ BKM ezért /2.74/ szerint $B\xi_0 - A \geq 0$. Egyenlőség nem lehet, mert ebből $A/B = \xi_0 \in \Omega_0^-$ ellentmondana feltevésünknek.

Tehát

/*/ $$B\xi_o - A > 0 .$$

Véges N esetén $B > B_n$ nem lehet mert $B_n\xi_o - A_n = 0$ biztosan jobb közelitő megoldás kisebb nevezővel. B=1 nem lehet mert $\omega_o = b_o/1 \in \Omega_o^-$ a legjobb 1 nevezőjü BKM.

Tegyük fel, hogy van olyan páratlan $\nu \geq 1$, hogy $B_{\nu-1} < B \leq B_\nu$. Az $\omega_{\nu-1}$ baloldali közelitésre a 2.4. Lemma szerint $|B\xi_o - A| \geq$ $\geq |B_{\nu-1}\xi_o - A_{\nu-1}|$ ellentmond /2.76/-nak, igy A/B nem lehet LBKM. Legyen tehát $B_{\nu-1} < B \leq B_\nu$ valamely páros $\nu \geq 2$ mellett. A /2.42/, /2.56/ és /2.57/ alapján

$$B_{\nu-2} = B_{\nu,o} < B_{\nu,c-1} < B_{\nu,c} < B_{\nu,b_\nu} = B_\nu , \quad 0 < c < b_\nu , \quad 2 \leq \nu < N,$$

ezért van olyan $1 \leq c \leq b_\nu$, hogy

$$B_{\nu,c-1} < B < B_{\nu,c} .$$

A 2.3. Lemma szerint minden $0 < B \leq B_{\nu,c}$, $A/B \neq \omega_{\nu,c}$ és $A/B \neq \omega_{\nu-1}$ esetén, amelyek most mind teljesülnek, /2.78/ igaz, azaz

$$|B\xi_o - A| \geq |B_{\nu,c-1}\xi_o - A_{\nu,c-1}| .$$

Ez azt jelenti, hogy egy B-nél kisebb nevezőjü $\omega_{\nu,c-1}$ jobb baloldali közelitő megoldás A/B-nél, vagyis ellentmond annak, hogy A/B egy LBKM legyen. Ugyanigy bizonyitható $B > 1$ esetén, hogy egy A/B LJKM csak Ω_o^+ eleme lehet. Csupán az /1,A/ alakú LJKM-ról kell bizonyitani, hogy nem lehet más, mint $\omega_{1,1} \in \Omega$. Ez azonban nyilvánvaló, hiszen a /2.74/-ből $\xi_o - A \leq 0$, igy $A \geq [\xi_o] = b_o$. Azonban $\xi_o = b_o$ esetén $A = b_o$, $\xi_o \neq b_o$ esetén $A = b_o + 1$ számlálóval $A/1 \in \Omega_o^+$, igy $A > b_o + 1$ kellene legyen. Ekkor azonban

$$|\xi_o - A| > |\xi_o - b_o - 1| = |B_{1,1}\xi_o - A_{1,1}| ,$$

ami ellentmond /2.76/-nak, igy A/1 nem lehet LJKM.

Q.e.d.

Ez a tétel azt jelenti, hogy bármely $\omega_{v,c} \in \Omega$ közelitő megoldással szemben a nem-nagyobb azonos oldali /Q,P/ közelitő megoldások rosszabbul közelitenek és e rosszabbak közül a legjobban közelit az $\omega_{v,c-1} \in \Omega$. Ez azt is jelenti, hogy az $\omega_{v,c-1} \in \Omega$ LEKM-nál nem rosszabb azonos oldali KM-ok "nevezője" mind nagyobb $B_{v,c-1}$ -nél és ezek között a minimális "nevezőjü" éppen az $\omega_{v,c} \in \Omega$.

2.4. Tétel: Ha $\xi_o \not\equiv 0$ /mod $\frac{1}{2}$/ (*), akkor a LKM-ok az

$$\omega_\nu = /B_\nu \,,\, A_\nu/ \quad , \quad 1 \le \nu < N,$$

egész számpárok, valamint az

$$\omega_o = /1 \,,\, b_o/ \qquad \text{akkor és csak akkor,}$$

ha $b_1 > 1$ [2.18. Tétel].

Bizonyitás. A 2.4. Lemma /2.83/ relációja biztositja, hogy ω_ν valóban LKM. A /2.83'/ pontosan ω_o-ra adja meg a LKM feltételét. Igazolni kell még, hogy $B > 1$ esetén A/B csak akkor lehet LKM, ha $A/B \in \Omega^*$

Az nyilvánvaló, hogy csak LEKM lehet LKM, ezért elegendő $A/B \in \Omega$ elemekkel foglalkoznunk. Mivel

$$B_{\nu,c} > B_{\nu-1} \quad , \quad 1 \le c \le b_\nu \quad , \quad b_1 > 1 \,,$$

a /2.56/ szerint és

$$|\Delta_{\nu,c}| > |\Delta_{\nu-1}| \,, \qquad 1 \le \nu < N \,,$$

a /2.66/ szerint, ezért $\omega_{\nu,c}$, $1 \le c \le b_\nu$, közelitő megoldásnál mindig van kisebb nevezőjü és pontosabb közelitő megoldás, az $\omega_{\nu+1,o} = \omega_{\nu-1} \in \Omega^*$, tehát $\omega_{\nu,c}$ nem lehet LKM.

Q.e.d.

Vezessük be az

$$\Omega_o^* = \{\omega_o | b_1 > 1\} \cup \{\omega_\nu, 1 \le \nu < N\} \doteq \{\omega_i^* \,|\, i = 1,2,\ldots\}$$

halmazt. Ez a LKM-ok rendezett halmaza növekvő nevezők és pontosság szerint rendezve. Ennek egyetlen 1 nevezőjü eleme az ω_1^*, amelyre $\omega_1^* = \omega_o$ ha $b_1 > 1$, $\omega_1^* = \omega_1$ ha $b_1 = 1$.

(*) $\xi_o \equiv 0$ /mod $\frac{1}{2}$/ esetén az egyetlen LKM maga a ξ_o /1,b_o/, illetve /2,2b_o+1/ alakban, a $\xi_o = b_o$ és $\xi_o = b_o + \frac{1}{2}$ eseteknek megfelelően.

2.5. Tétel: $\mathfrak{R}$ elemei éppen a ξ_0-hoz LEK-ek;
$\mathfrak{R}_0^-$ elemei a LBK-ek, $\mathfrak{R}_0^+$ elemei a LJK-ek.

Bizonyitás: Hogy $\mathfrak{R}$ elemei LEK-ek, az következik a 2.4. Lemmából. Ha ugyanis $Q \leq B$ relációból következik $|Q\xi_0 - P| > |B\xi_0 - A|$, akkor $|\xi_0 - \frac{P}{Q}| > \frac{1}{Q}|B\xi_0 - A| \geq \frac{1}{B}|B\xi_0 - A| = |\xi_0 - \frac{A}{B}|$. Ezért minden LEKM egyben LEK is. Be kell látni, hogy nincs más LEK. Tegyük fel, hogy A/B egy LEK, de $A/B \notin \mathfrak{R}$. Ha $A/B < \omega_0$, akkor $|B|>0$ miatt az $\omega_0 = \frac{0}{1}$ jobb közelités nem nagyobb nevezővel, igy A/B nem LEK. Ha $A/B > \omega_{1,1} \in \mathfrak{R}$, akkor nem minden nem-nagyobb nevezőjü tört rosszabb közelités, tehát A/B nem LEK. Tehát A/B csak az $[\omega_0, \omega_{1,1}]$ intervallumba eshet. Ekkor van olyan $\nu \geq 1$ és $1 \leq c \leq b_\nu$ indexpár, hogy A/B az $\omega_{\nu,c-1}$ és $\omega_{\nu,c}$ közé esik. Ekkor /2.51/ figyelembevételével

$$0 < \left|\frac{A}{B} - \omega_{\nu,c-1}\right| < \left|\omega_{\nu,c} - \omega_{\nu,c-1}\right| = \frac{1}{B_{\nu,c}B_{\nu,c-1}},$$

amelyet $B.B_{\nu,c-1}$ -gyel szorozva

$$0 < |AB_{\nu,c-1} - A_{\nu,c-1}B| < \frac{B}{B_{\nu,c}}$$

egyenlőtlenség adódik. Itt a középső tag egész és legalább 1 ezért ebből $B > B_{\nu,c}$ adódik. Mivel $\omega_{\nu,c}$ közelebb van ξ_0-hoz, mint $\omega_{\nu,c-1}$ és A/B e kettő közé esik /és egyikkel sem egyenlő, hisz abból $A/B \in \mathfrak{R}$ következne/, ezért $\omega_{\nu,c}$, közelebb van ξ_0-hoz, mint A/B. Viszont nevezője kisebb, ezért A/B nem lehet LEK. Ez ellentmondás.

Q.e.d.

2.6. Tétel: A LK-ek halmaza az $\Omega^{\pm}$. Vagyis ω_0 /ha $b_1 > 1$/, ω_ν /$1 \le \nu < N$/ és $\omega_{\nu,\bar{c}}$ /$\bar{c}_\nu \le \bar{c} \le b_\nu$, $1 \le \nu < N$/ a legjobb közelitések, és csak ezek.

$$/2.84/ \qquad \bar{c}_\nu = \begin{cases} \dfrac{b_\nu}{2}, & \text{ha } b_\nu \text{ páros és } B_\nu/B_{\nu-1} > \xi_\nu \\ f_{>}\left(\dfrac{b}{2}\right) & \text{egyébként} \end{cases}$$

[2.18, 2.22 és 2.23. Tételek].

Bizonyitás: Nyilván ω_0 akkor és csak akkor LK, ha LKM, hiszen $B_0=1$. Továbbá minden LKM egyben LK is az egyoldali közelitésekhez hasonlóan /l. 2.5. Tétel bizonyitásában/. Másrészt LK csak LEK lehet, tehát Ω eleme. Egy $\omega_{\nu,c}$, $0 < c < b_\nu$, definició szerint akkor és csak akkor LK, ha nincs nála kisebb nevezőjü jobb közelités Ω-ban. A 2.3. Lemma szerint az $\omega_{\nu,c}$-nél kisebb nevezőjü nem rosszabb közelités csak az $\omega_{\nu-1}$ lehet. Tehát akkor és csak akkor lesz LK, ha

$$/*/ \qquad |\delta_{\nu,\bar{c}}| < |\delta_{\nu-1}| ,$$

ami éppen $\bar{c}_\nu$-nek a /2.61/ alatti definiciójával azonos követelmény, vagyis $\bar{c}_\nu \le \bar{c} \le b_\nu$ esetén áll fenn. Az ilyen $\delta_{\nu,\bar{c}}$ elemek pedig definició szerint $\Omega^{\pm}$ halmazt alkotják. Bizonyitandó még /2.84/. /2.52/ figyelembevételével a /*/ ekvivalens

$$\frac{\xi_\nu - \bar{c}}{B'_\nu B_{\nu,\bar{c}}} < \frac{1}{B'_\nu B_{\nu-1}}$$

egyenlőtlenséggel, amiből

$$/\xi_\nu - \bar{c}/B_{\nu-1} < \bar{c} B_{\nu-1} + B_{\nu-2} ,$$

azaz

$$2\bar{c}B_{\nu-1} + B_{\nu-2} > \xi_\nu B_{\nu-1} .$$

$2\bar{c} \ge b_\nu + 1$ mellett

$$2\bar{c}B_{\nu-1} + B_{\nu-2} \ge /b_\nu + 1/B_{\nu-1} + B_{\nu-2} \ge /b_\nu + 1/B_{\nu-1} > \xi_\nu B_{\nu-1} ,$$

tehát teljesül /*/. $2\bar{c} \le b_\nu - 1$ mellett

$$2\bar{c}B_{\nu-1} + B_{\nu-2} \leq /b_\nu - 1/B_{\nu-1} + B_{\nu-2} \leq b_\nu B_{\nu-1} \leq \xi_\nu B_{\nu-1} ,$$

tehát nem teljesül /x/. Ha b_ν páros és $2\bar{c} = b_\nu$, akkor

$$2\bar{c}B_{\nu-1} + B_{\nu-2} = b_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2} = B_\nu > \xi_\nu B_{\nu-1}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $B_\nu / B_{\nu-1} > \xi_\nu$, vagyis /2.84/ teljesül.

Q.e.d.

2.6. A KIF megoldása

A legjobb közelitő megoldások /LKM/ ismeretében megadhatjuk a 2.1. Korolláriumban szereplő három fajta tipikus homogén KIF megoldását. A /2.18/ - /2.2o/ egyenlőtlenségeket $x > 0$-val végigosztva,

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \alpha = \frac{a}{x}$$

jelöléssel a három KIF alakja rendre:

/2.85/	$\lvert B\xi - A \rvert \leq \alpha$	K/M/KIF
/2.86/	$0 \leq B\xi - A \leq 2\alpha$	B/M/KIF
/2.87/	$-2\alpha \leq B\xi - A \leq 0$	J/M/KIF.

Az egyenlőtlenségeket kielégitő /B,A/ egyész párok a ξ -hez közelitő megoldások. A 2.1. Korollárium szerint ezek mindig végtelen sokan vannak, kivéve az $\alpha = 0$, ξ irracionális esetet, amikor csak a /B,A/ = /0,0/ triviális megoldás létezik.

A triviális megoldás, akár elfogadhatónak tekintjük, akár nem, érdektelen a továbbiakban, ezért kizárjuk az $\hat{\Omega}$ halmazból.

Ugyancsak érdektelen a további vizsgálataink szempontjából az olyan ω^* megoldás, ahol $B^* = 0$. Hogy $/0,A^*/$ alakú megoldás létezik-e, mindig triviálisan eldönthető, ezért a B=0 komponensü elemeket is kizárhatjuk $\hat{\Omega}$ -ból. Vagyis $\hat{\Omega} = \{ \omega \mid B \geq 1, /B,A/$ kielégiti a KIF egyenlőtlenségét$\}$.

Mind α , mind ξ szempontjából bizonyos eseteket célszerü külön kezelni, mint triviálisan megoldhatókat.

A $\xi \equiv 0$ /mod $\frac{1}{2}$/, vagyis $\xi = b_0$ egész és $\xi = b_0 + \frac{1}{2}$ esetekben egyszerüen megállapitható, hogy a /0,0/, /0,1/, /1,0/,... $/1,b_0/$, $/1,b_0+1/$, $/2,2b_0 \pm 1/$ sorozat első ki nem zárt eleme, amely kielégiti a KIF egyenlőtlenségét, melyik lesz. Ez adja ω^* megoldást.

Az $\alpha \geq \frac{1}{2}$ esetben szintén könnyü meghatározni az első megengedhető $/B^*,A^*/$ párat, amely az egyenlőtlenséget kielégiti. Ez is a /0,0/, /0,1/, /1,0/, ... sorozat tagja lesz.

További speciálisként kell tekintenünk az $\alpha=0$ esetet, amikor irracionális ξ mellett csak a /0,0/ triviális megoldás létezik - ha elfogadható -, racionális $\xi=P/Q, Q>0$, P,Q relativ prim egészek, mellett pedig $\omega^*=/Q,P/$ a KIF megoldása. Ekkor ugyanis mindhárom KIF-nél az egyenlőtlenség a

/2.88/ $$B\xi - A = 0$$

egyenlőséggé válik.

Ezekután csupán a

/2.89/ $$\xi > 0, \quad \xi \not\equiv 0 \ /\mathrm{mod}\ \tfrac{1}{2}/, \quad 0 < \alpha < \tfrac{1}{2}, \quad B \geq 1$$

feltételek mellett kell keresnünk a /2.85/-/2.87/ egyenlőtlenségek jellemezte KIF-ek megoldását. Erre a problémára adja meg a választ a következő tétel.

2.7. Tétel: A /2.89/ feltételek mellett a /2.85/-/2.87/ alatti koincidencia feladatok megoldása legjobb közelitő megoldás, mégpedig rendre a $\xi_0 = \xi$ -hez tartozó

$$\Omega_0^{x}, \quad \Omega_0^{-}, \text{ ill. } \Omega_0^{+}$$

halmazok első $\hat{\Omega}$ -val közös eleme, tehát

LKM, LBKM, ill. LJKM.

A megoldás mindig létezik és B^*, A^* komponensek relativ primek.

Bizonyitás: Nyilvánvaló definició szerint, hogy a /2.89/ feltétel mellett bármelyik KIF megoldása legjobb közelitő megoldás, hiszen $\omega \neq \omega^*$, $\omega \leq \omega^*$ esetén Δ_ω már nem tehet eleget a KIF egyenlőtlenségének.

Ebből következik, hogy

$$|\Delta_\omega| \doteq |B_\omega \xi - A_\omega| > |B^* \xi - A^*| = |\Delta^*|,$$

amely éppen annak kritériuma, hogy $\omega^* = /B^*, A^*/$ legjobb közelitő megoldás legyen ξ -hez. Hogy $\hat{\Omega}$ -nak van LKM eleme az következik abból, hogy irracionális ξ esetén az Ω_0^x ω_i^x elemeinél $B_i^* \to \infty$, $|\Delta_i^x| \to 0$, ha $i \to \infty$, racionális esetén pedig az $\omega = /Q,P/$ mindig eleme Ω_0^x -nek és erre $\Delta = 0$. Ez utóbbi esetben ω akkor is megoldása a KIF-nek, ha $\alpha = 0$. Mivel minden közelités relativ prim /B,A/ számpár ezért az ω^* megoldás komponensei is relativ primek.

Q.e.d.

Az $\alpha = 0$ esetre vonatkozó tények és a 2.7. Tétel lehetővé teszi, hogy algoritmusokat konstruáljunk a /2.88/ és a /2.85/ - /2.87/ homogén KIF-ek megoldására.

Ezek az algoritmusok a következők lesznek:

R - Algoritmus az $\alpha = 0$, ξ racionális esetben

K/M/KIFM-Algoritmus a K/M/KIF megoldására

B/M/KIFM-Algoritmus a B/M/KIF megoldására

J/M/KIFM-Algoritmus a J/M/KIF megoldására.

Akár kézi számitáshoz, akár programozáshoz az algoritmusok másképp is átrendezhetők, de az alábbi formális definiciók tartalmazzák azoknak a legjobb közelitő megoldásoknak a megkeresését, amelyek a megoldást adják. Ennek ellenére a szereplő változókat úgy definiáltuk, hogy lehetőleg minél kevesebb adat tárolására legyen szükség. Ez programozáskor lehet fontos.

R-Algoritmus: Bemenő adat: ξ racionális szám

Kimenő adatok: $Q>0$, P relativ prim egészek $/P/Q=\xi/$

1. Lépés: $A_2:=0$, $B_2:=1$, $A_1:=1$, $B_1:=0$, $i:=2$, $\xi_o:=\xi$;

2. Lépés: $\xi_o = b + r$, b egész, $0\leq r<1$;

$A_i:= bA_{3-i} + A_i$, $B_i:= bB_{3-i} + B_i$;

3. Lépés: Ha $r>0$, akkor $\xi_o:= 1/r$, $i:=3-i$ és 2. Lépés.

Ha $r=0$, akkor $Q:= B_i$, $P:= A_i$

Vége.

Igazolás: A racionális $\xi=P/Q$, $Q>o$, P,Q relativ prim, esetén az R-Algoritmus az euklideszi algoritmus és a /2.28/ definició szerint az A_v, B_v egész párok sorozatát számitja rekurzive és az utolsó A_n, B_n számitásával ér véget. /2.37/ szerint ezek is relativ primek és /2.43/ szerint $\xi=A_n/B_n$. Igy valóban $Q=B_n$, $P=A_n$.

Az R-Algoritmus $B^*=Q$, $A^*=P$ kimenete lesz a /2.88/ egyenlőség megoldása.

Ha ξ irracionális, az R-Algoritmus definiálatlan, mert elvileg sosem ér véget. A valóságban ξ mindig korlátozott pontossággal van megadva, azaz eleve racionálisan közelitve, ezért az algoritmus egy R/Q alakú közelitést szolgáltat.

Nézzük most a K/M/KIF megoldására szolgáló algoritmust.

<u>K/M/KIFM - Algoritmus</u>: <u>Bemenő adatok</u>: $\xi \neq 0$ /mod $\frac{1}{2}$/, $0<\alpha<\frac{1}{2}$ valósak

<u>Kimenő adatok</u>: $m \geq 0$, $B>0$, A egészek, Δ valós

<u>1. Lépés</u>: $A_{-2}:=0$, $B_{-2}:=1$, $A_{-1}:=1$, $B_{-1}:=0$, $\nu:=-1$, $\xi_0:=\xi$, $U:=\frac{1}{\alpha}$, $i:=2$;

<u>2. Lépés</u>: $\xi_0 = b + r$, b egész, $0 \leq r < 1$;

$A_{-i} := bA_{i-3} + A_{-i}$, $B_{-i} := bB_{i-3} + B_{-i}$, $\nu := \nu + 1$;

<u>3. Lépés</u>: Ha $r = 0$, akkor <u>4. Lépés</u>;

Ha $B_{-i} \leq U$, akkor $\xi_0 := \frac{1}{r}$, $i:=3-i$ és <u>2. Lépés</u>

<u>4. Lépés</u>: $B' := \dfrac{/\xi_0 - b/B_{i-3} + B_{-i}}{\xi_0}$;

Ha $U \leq B'$, akkor $m := \nu - 2$,

$B := B_{-i} - bB_{i-3}$, $A := A_{-i} - bA_{i-3}$,

$\Delta := (-1)^{\nu-2}/B'$ és <u>Vége</u>;

$B' := /\xi_0 - b/B_{i-3} + B_{-i}$;

Ha $U \leq B'$, akkor $m := \nu - 1$,

$B := B_{i-3}$, $A := A_{i-3}$,

$\Delta := (-1)^{\nu-1}/B'$ és <u>Vége</u>;

Egyébként $m := \nu$,

$B := B_{-i}$, $A := A_{-i}$, $\Delta := 0$

<u>Vége</u>.

<u>Igazolás</u>: Bizonyitani kell, hogy az algoritmus az Ω_0^* első olyan ω_ν, $0 \leq \nu < N$ elemét választja ki, amelyre $|\Delta_\nu| < \alpha$. Először formálisan tisztázzuk, hogy az algoritmus változói milyen értékeket vesznek fel.

Az algoritmus a 2. Lépés ismétlésével rendre meghatározza az $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_\nu, \dots$ fő-közelitéseket a $\xi_0 = \xi$ számhoz mindaddig, amig a 3. Lépésben $r=0$, vagy $B_{-i} > U$ be nem következik. Ugyanis a $\nu=0,1,\dots$ érték mindenkor a ξ_0 lánctört-fejtésének fázisát mutatja és a 2. Lépésben a ξ_ν, $r_\nu = 1/\xi_{\nu+1}$, vagy 0, A_ν, B_ν mennyiségeket számitjuk ki. Az i értéke váltakozva 2 és 1 ezért az A_{-2}, A_{-1} és B_{-2}, B_{-1} váltakozva kapják A_ν ill. B_ν értékét.

A ν-edik ciklus után a 3. Lépésből a 4. Lépésbe jutva

$B_{-i} = B_\nu$, $A_{-i} = A_\nu$, $B_{i-3} = B_{\nu-1}$, $A_{i-3} = A_{\nu-1}$, $\xi_0 = \xi_\nu$, $b = b_\nu$

lesznek az értékek. Ezért a B' változó első értéke

$$B' = B_{\nu-1} + (B_\nu - b_\nu B_{\nu-1})/\xi_\nu = B_{\nu-1} + B_{\nu-2}/\xi_\nu = B'_\nu/\xi_\nu = B'_{\nu-1}$$

a /2.31/ összefüggések következtében. B' második értéke

$$B' = \xi_\nu B_{\nu-1} + B_\nu - b_\nu B_{\nu-1} = \xi_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2} = B'_\nu .$$

Az B és A első értéke pedig

$$B = B_\nu - b_\nu B_{\nu-1} = B_{\nu-2}, \quad A = A_\nu - b_\nu A_{\nu-1} = A_{\nu-2} .$$

A $B'_{\nu-1}$, B'_ν, B és A ilyen számitásával megtakaritjuk az $\xi_{\nu-1}$, $A_{\nu-2}$, $B_{\nu-2}$ értékek megőrzését.

Az algoritmus tehát akkor jut a 4. Lépésbe, ha vagy $r=0$, ami $\nu=n$ /ξ racionális/ mellett következhet be, vagy $B_\nu > U \doteq \frac{1}{\alpha}$. $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ következtében azonban $2 < U < \infty$, ezért $B_0 = 1 < U$ mindig teljesül, tehát a 2. Lépés ismétlődik, kivéve, ha $\nu = 0$-ra $r = 0$. $\xi \neq b_0$ egész miatt azonban $n \geq 1$ biztosan teljesül, ezért az utóbbi sem következhet be. Vagyis a 4. Lépésbe csak $\nu \geq 1$ mellett juthat az algoritmus. $\nu = 1$ esetben a /2.3o/ definició szerint $B'_{\nu-1} = B'_0 = 1$, amelyre $B' < U$ adódik, ezért $m = \nu - 2 = -1$ biztosan nem következik be. $\nu = 1$ esetben $B'_\nu = B'_1 = \xi_1$, amely következtében $U \leq B'$, azaz $m = \nu - 1 = 0$ csak akkor lehet, ha $\xi_1 > 2$, azaz $b_1 \geq 2$. Ekkor definició szerint ω_0 valóban eleme az Ω_0 halmaznak, tehát a nyert megoldás Ω_0 eleme /első eleme/.

A 4. Lépés helyességének ellenőrzéséhez különböztessünk meg három esetet:

/a/ $|\Delta_0| \leqslant \alpha$

/b/ $|\Delta_\nu| \leqslant \alpha \leqslant' |\Delta_{\nu-1}|$, $1 \leq \nu < N-1$ $(=n)$

/c/ $0 < \alpha \leqslant' |\Delta_{n-1}|$ /ξ_0 racionális, $\Delta_n = 0$/ .

A /2.64/ figyelembevételével ezek ekvivalensek az

/a/ $U \leqslant B'_1$

/b/ $B'_\nu \leqslant' U \leqslant B'_{\nu+1}$ $\quad 1 \leq \nu < N-1$ /=n/

/c/ $B_n \leqslant' U$ $\quad$ /ξ_0 racionális, $B'_n = B_n$ /

esetekkel. A /2.85/ alatti K/M/KIF megoldása a 2.7. Tétel szerint Ω_0^* első olyan ω_ν eleme, amelyre $|\Delta_\nu| \leqslant \alpha$, azaz $U \leqslant B'_{\nu+1}$ teljesül, ha ilyen van, egyébként/csak racionális esetben/ ω_n. A /2.42/ relációk szerint $B_\nu < B'_\nu < B_{\nu+1}$, $0 \leq \nu < N-2$, tehát $U \leqslant B'_{\nu+1}$ biztosan teljesül, ha $U < B_\nu$. Ezért az algoritmus megkeresi az első ν indexet, amelyre $U < B_\nu$, vagy $\nu = n$ /racionális eset/. Ezután a 4. Lépésben ellenőrzi, hogy $U \leqslant B'_{\nu-1}$ teljesül-e. $B_{\nu-1} \leq U$ miatt $B'_{\nu-2} < U$ még biztosan igaz, annak ellenőrzésére nincs szükség. Ha $U \leqslant B'_{\nu-1}$ teljesül, akkor a megoldás $\omega_{\nu-2}$ /$B = B_{\nu-2}$, $A = A_{\nu-2}$, $\Delta = (-1)^{\nu-2}/B'_{\nu-1}$/. Ha $U \leqslant B'_{\nu-1}$ nem teljesül, ellenőrizzük, hogy $U \leqslant B'_\nu$ teljesül-e. Ha igen a megoldás $\omega_{\nu-1}$ /$B=B_{\nu-1}$, $A=A_{\nu-1}$, $\Delta=(-1)^{\nu-1}/B'_\nu$/. Ha nem teljesül, akkor a megoldás ω_n /$B=B_n$, $A=A_n$, $\Delta_n = 0$/ , ugyanis ha 3. Lépésben $B_\nu > U$ és nem $\nu = n$ következett be, akkor $B'_\nu > B_\nu$ miatt $U \leqslant B'_\nu$ automatikusan teljesül. Vagyis a K/M/KIFM-Algoritmus minden esetben a kivánt kimenetet szolgáltatja. A /2.85/ megoldása ebből $B^* = B$, $A^* = A$, amelyre $\Delta^* = \Delta$ és ez az m-edik fő-közelítés ξ számhoz.

Megjegyezzük, hogy ha ξ racionális, akkor a K/M/KIFM-Algoritmus $\alpha = 0$ mellett is müködik és $\omega^* = /Q, P/$ helyes megoldást szolgáltatja, mert $U = 1/\alpha = \infty$. Az R-Algoritmus azonban erre az esetre egyszerübb.

A B/M/KIF és J/M/KIF megoldására következő algoritmusok bonyolultabbak a K/M/KIFM-Algoritmusnál, mivel az Ω_o^- és Ω_o^+ elemei nemcsak fő-közelitések, hanem a mellék-közelitések azámitására is szükség van. A két algoritmus azonban érthető okból teljesen analóg, ezért szinte szóról-szóra megegyezik. Mindkettő igazolását egyszerre végezzük.

<u>B/M/KIFM-Algoritmus</u>: <u>Bemenő adatok</u>: $\xi > 0$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ valósak;

<u>Kimenő adatok</u>: $m \geq 0$, $c \geq 0$, $B^* > 0$, A^*, $B^- \geq 0$, A^- egészek, $\Delta^* \geq 0$ valós;

<u>1.Lépés</u>: $A_{-2} := 0$, $B_{-2} := 1$, $A_{-1} := 1$, $B_{-1} := 0$, $\nu := -1$, $\xi_o := \xi$, $U := \frac{1}{2\alpha}$, $i := 2$;

<u>2.Lépés</u>: $\xi_o = b + r$, b egész, $0 \leq r < 1$;

$A_{-i} := bA_{i-3} + A_{-i}$, $B_{-i} := bB_{i-3} + B_{-i}$, $\nu := \nu + 1$;

<u>3.Lépés</u>: Ha $r = 0$, akkor 4.Lépés;

Ha $B_{-i} \leq U$, akkor $\xi_o := 1/r$, $i := 3-i$ és 2.Lépés;

<u>4.Lépés</u>: $B' := /\xi_o - b/B_{i-3} + B_{-i}$;

Ha ν páros, akkor $c' := f_{\leq}\left(\frac{B'}{U} + b - \xi_o\right)$ és

$m := \nu$, $B^- := B_{i-3}$, $A^- := A_{i-3}$, $B^* := B_{-i} - c'B_{i-3}$, $A^* := A_{-i} - c'A_{i-3}$,

$c := b - c'$, $\Delta^* := (\xi_o - c)/B'$;

Ha ν páratlan, akkor

$U \leq B'$ esetén: $m := \nu - 1$, $B^- := B_{-i} - bB_{i-3}$, $A^- := A_{-i} - bA_{i-3}$,

$B^* := B_{i-3}$, $A^* := A_{i-3}$, $c := [A^*/A^-]$, $\Delta^* := 1/B'$;

$B' \not\leq U$ esetén: $m := \nu$, $B^- := B_{i-3}$, $A^- := A_{i-3}$,

$B^* := b_{-i}$, $A^* := A_{-i}$, $c := b$, $\Delta^* := 0$;

<u>Vége</u>.

Ez a baloldali KIF megoldó algoritmusa.

Az algoritmus igazolását együtt végezzük az alább következő J/M/KIFM-Algoritmus igazolásával.

J/M/KIFM-Algoritmus: Bemenő adatok: $\xi > 0$, $\xi \not\equiv 0$ /mod 1/, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ valósak;

Kimenő adatok: $m \geq 0$, $c \geq 0$, $B^* > 0$, A^*, $B^- \geq 0$, A^- egészek, $\Delta^* \leq 0$ valós;

1.Lépés: $A_{-2} := 0$, $B_{-2} := 1$, $A_{-1} := 1$, $B_{-1} := 0$, $\nu := -1$, $\xi_o := \xi$, $U := \frac{1}{2\alpha}$, $i := 2$;

2.Lépés: $\xi_o = b + r$, b egész, $0 \leq r < 1$;

$A_{-i} := bA_{i-3} + A_{-i}$, $B_{-i} := bB_{i-3} + B_{-i}$, $\nu := \nu + 1$;

3.Lépés: Ha $r = 0$, akkor 4.Lépés;

Ha $B_{-i} \leq U$, akkor $\xi_o := 1/r$, $i := 3-i$ és 2.Lépés;

4.Lépés: $B' := /\xi_o - b/B_{i-3} + B_{-i}$;

Ha ν páratlan, akkor $c' := f_{\leq}\left(\frac{B'}{U} + b - \xi_o\right)$ és

$m := \nu$, $B^- := B_{i-3}$, $A^- := A_{i-3}$, $B^* := B_{-i} - c'B_{i-3}$,

$A^* := A_{-i} - c'A_{i-3}$, $c := b - c'$, $\Delta^* := -(\xi_o - c)/B'$;

Ha ν páros, akkor

$U \leq B'$ esetén: $m := \nu - 1$, $B^- := B_{-i} - bB_{i-3}$, $A^- := A_{-i} - bA_{i-3}$,

$B^* := B_{i-3}$, $A^* := A_{i-3}$, $c := [A^*/A^-]$, $\Delta^* := -1/B'$,

$B' \not\leq U$ esetén: $m := \nu$, $B^- := B_{i-3}$, $A^- := A_{i-3}$,

$B^* := B_{-i}$, $A^* := A_{-i}$, $c := b$, $\Delta^* := 0$

Vége.

Ez a jobboldali KIF megoldó algoritmusa.

Megjegyzés: Formálisan a B/M/KIFM- ésJ/M/KIFM-Algoritmus csupán a következőkben különbözik: a másodiknál $\xi \not\equiv 0$ /mod 1/ kikötés, az elsőnél $\Delta^* \geq 0$, a másodiknál $\Delta^* \leq 0$ kimenő adat és a 4.Lépésben a ν páros és ν páratlan szerepcseréje, valamint Δ^* formulák ellenkező előjele. Ezek az eltérések a 2.7.Tétel következtében érthetőek az Ω_o^- és Ω_o^+ közelités-halmazok szimmetrikus szerepe alapján.

Az algoritmusok igazolása: Először a 2.7. Tétel és a korábbi összefüggések alapján meghatározzuk, hogy a szóbanforgó algoritmusoknak pontosabban milyen feladatot kell végrehajtani ok. Utána az algoritmusok elemzésével kimutatjuk, hogy pontosan ezt a feladatot hajtják végre.

A 2.7. Tétel szerint a B/M/KIFM-Algoritmusnak az Ω_o^- a J/M/KIFM-Algoritmusnak az Ω_o^+ halmaz egy-egy elemét kell kiválasztania. Definició szerint mindkét halmaz elemei $\omega_{\nu,c}$ közelitések a $\xi_o = \xi$ számhoz.

Az Ω_o^- halmaz ω_i^-, i=1,2,...elemei az $\omega_{2\mu,c}$, $0 \leq c < b_{2\mu}$, $1 \leq \mu < \left[\frac{N+1}{2}\right]$ közelitések, és az ω_n racionális ξ esetén. A Δ_i^- hibák nemnegativak és monoton csökkennek, ha i nő.

Az Ω_o^+ halmaz ω_i^+, i=1,2,...elemei az $\omega_{2\mu+1,c}$, $1 \leq c \leq b_{2\mu+1}$, $0 \leq \mu < [N/2]$ közelitések, és az ω_n racionális ξ esetén. A Δ_i^+ hibák nem-pozitivak és abszolut értékük monoton csökken, ha i nő.

A 2.7. Tétel szerint a megoldás e halmazok eleme és definició szerint az első olyan elemnek kell lennie, amelyre $|\Delta_i| \leq 2\alpha$. Ilyen biztosan van, mert mind Ω_o^-, mind Ω_o^+ halmazban végtelen sok elem van, ha ξ irracionális és $|\Delta_i| \longrightarrow 0$, ha $i \to \infty$, és eleme ω_n, ha ξ racionális és arra $\Delta_n = 0$.

A /2.66/ és /2.67/ relációk szerint

$$|\Delta_{\nu-2}| > |\Delta_{\nu,c-1}| > |\Delta_{\nu,c}| > |\Delta_{\nu-1}| > |\Delta_\nu|$$
$$2 \leq c \leq b_\nu - 1 \;,\quad 1 \leq \nu < N \;,$$

relációsor irható fel az $\omega_{\nu,c}$ közelitések $\Delta_{\nu,c}$ hibáira. Ennek alapján az Ω_o^- ill. Ω_o^+ elejét, egy általános szakaszát és racionális esetben a végét az alábbi módon jellemezhetjük a Δ_i hibák viszonyával.

$$>\Delta_o>\Delta_{2,1}>\ldots>\Delta_{2,b_2-1}> \qquad >\Delta_2>\ldots\in\Omega_o^-$$

$$|\Delta_{1,1}|>\ldots>|\Delta_{1,b_1-1}|> \qquad |\Delta_1|>\ldots>|\Delta_{3,b_3-1}|> \qquad \in\Omega_o^+$$

$$\ldots > |\Delta_{2\mu-1,b_{2\mu-1}-1}| > \Delta_{2\mu-2} > \Delta_{2\mu,1} > \ldots > \Delta_{2\mu,b_{2\mu}-1} > $$

$$> |\Delta_{2\mu-1}| > |\Delta_{2\mu+1,1}| > \ldots > |\Delta_{2\mu+1,b_{2\mu+1}-1}| > \Delta_{2\mu} > \ldots$$

$$\ldots > |\Delta_{2m-1,b_{2m-1}-1}| > \Delta_{2m-2} > \Delta_{2m,1} > \ldots > \Delta_{2m,b_{2m}-1} > $$

$$> |\Delta_{2m-1}| > |\Delta_{2m+1,1}| > \ldots > |\Delta_{2m+1,b_{2m+1}-1}| > \ldots \Delta_n = 0$$

Mind Ω_o^-, mind Ω_o^+ halmazban annak a $\left] |\Delta_i^X|, |\Delta_{i-1}^X| \right[$ intervallumnak a megtalálása a feladat, amely tartalmazza a 2α mennyiséget, vagyis $|\Delta_i^X| \leqq 2\alpha \leqq' |\Delta_{i-1}^X|$, illetve annak eldöntése, hogy már $|\Delta_1^X| \leqq 2\alpha$. Ehhez a $|\Delta_i^X|$ hibákat rendre össze kellene hasonlitani 2α -val. Ehelyett célszerübb $U \doteq 1/2\alpha$ és az $1/|\Delta_i^X|$ reciprok hibák összehasonlitása.

A /2.64/ és /2.65/ szerint

$$|\Delta_\nu| = |\Delta_{\nu,b_\nu}| = 1/B'_{\nu+1} \ , \quad 0 \leq \nu < N,$$

$$|\Delta_{\nu,c}| = /\xi_\nu - c//B'_\nu \ , \quad 0 < c \leq b_\nu \ , \quad 0 \leq \nu < N.$$

Az ω^* megoldás három esetét különböztethetjük meg ennek segitségével mindkét halmaznál.

Ω_o^- halmaznál ω^* megoldás esetei:

/a/ ω_o: $\quad U \leqq B'_1 = \xi_1$

/b/ $\omega_{2\mu,c}$: $\quad B'_{2\mu}//\xi_{2\mu}-c+1/ \leqq' U \leqq B'_{2\mu}//\xi_{2\mu}-c/, \quad 1 \leq c \leq b_{2\mu}, \quad 1 \leq \mu \leq \left[\frac{N+1}{2}\right]$

/c/ ω_n: $\quad B_n \leqq' U \quad$ / ξ_o racionális/.

Ω_o^+ halmaznál ω^* megoldás esetei:

/a/ $\omega_{1,1}$: $U \leqslant B_1'//\xi_1-1/ = \xi_1//\xi_1-1/$

/b/ $\omega_{2\mu+1,c}$: $B'_{2\mu+1}//\xi_{2\mu+1}-c+1/ \leqslant' U \leqslant B'_{2\mu+1}//\xi_{2\mu+1}-c/$, $1 \leq c \leq b_{2\mu+1}$, $0 \leq \mu < [N/2]$

/c/ ω_n: $B_n \leqslant' U$ / ξ_o racionális/.

Az algoritmusok feladata az $U=1/2\alpha$ helyének megkeresése az $1/|\Delta_i^X|$, $i=1,2,\dots$ monoton növekedő sorozat határolta intervallumok között. Ahelyett azonban, hogy e határpontokat számitanánk és egyenként összehasonlitanánk U-val, először az U-t a felülről határoló B_ν közelitő nevezővel határoljuk be.

Az algoritmusok a 2. Lépés ismétlésével a ξ_o, B_{-i}, A_{-i} változókban rendre meghatározzák a ξ_ν, B_ν, A_ν, $\nu=0,1,\dots$ mennyiségeket mindaddig, amig r=0, azaz racionális esetben $\nu=n$, vagy $B_\nu > U$ be nem következik. Ezeket a feltételeket a 3. Lépésben ellenőrzik. Az algoritmusok a 4. Lépésben fejeződnek be egy ω^* megoldás előállitásával. Mielőtt ennek helyességét megvizsgáljuk, nézzük meg az egyes változók értékét a 4. Lépésbe ugrás pillanatában, ha ez a 2. Lépés $\nu+1$ végrehajtása után következik be:

$\xi_o=\xi_\nu$, $b=b_\nu$, $r=0$, vagy $r=1/\xi_{\nu+1}$, $B_{-i}=B_\nu$, $A_{-i}=A_\nu$,
$B_{i-3}=B_{\nu-1}$, $A_{i-3}=A_{\nu-1}$; ha $r\neq 0$, akkor $B_\nu>U$; $B_{\nu-1}\leq U$ igaz!
A 4. Lépésben igy

$$B'= /\xi_\nu - b_\nu/B_{\nu-1}+ B_\nu = \xi_\nu B_{\nu-1}+ B_{\nu-2}= B'_\nu$$

kerül először kiszámitásra, majd ω^*-nak megfelelő kimeneti adatok előállitása történik meg.

Előszöris $0<\alpha<1/2$ következtében $1<U<\infty$. A $\xi_o= b_o$ egész az első algoritmusban megengedett. Ekkor n=0 és az első ciklus után ν=o mellett a 4. Lépésbe jutunk. Ekkor ν=o páros, $B'=B'_o=B_{-i}=B_o=1$, $c'=f_{\leqslant}(1/U)=0$ és m=0, $B^-=0$, $A^-=1$, $B^*=B_o=1$, $A^*=A_o=b_o$, $c=b_o$, $\Delta^*=0$ a helyes $\omega^*=\omega_o$

megoldás jellemzői. A második algoritmusnál $\xi_o = b_o$ egész eset kizárt, ezért ν=o mellett r=o nem következik be. $B_o=1 < U$ miatt $\xi \not\equiv 0$ /mod 1/ esetben tehát ν=o mellett egyik algoritmus sem jut a 4. Lépésbe.

ν=1, r=o esetén n=1 páratlan. Az első algoritmus $U \leqslant B_1' = B_1 = b_1$ esetén, amikor $\Delta_o \leqslant 2\alpha$, a fentebbi /a/ esetnek megfelelően helyes $\omega^* = \omega_o$ megoldást szolgáltatja

$m = 0,\ B^- = B_{-1} = 0,\ A^- = A_{-1} = 1,\ B^* = B_o = 1,\ A^* = A_o = b_o,\ c = b_o,\ \Delta^* = 1/b_1$

adatokkal. $b_1 \leqslant' U$ esetén, amikor $2\alpha \leqslant' \Delta_o$, ismét a fentebbi /c/ esetnek megfelelő $\omega^* = \omega_n = \omega_1$ helyes eredményt és

$m = 1,\ B^- = B_o = 1,\ A^- = A_o = b_o,\ B^* = B_1 = b_1,\ A^* = A_1 = b_1 b_o + 1,\ c = b_1,\ \Delta^* = 0$

adatait szolgáltatja. A második algoritmus a $c' = f_{\leqslant}(b_1/U)$, m=1,

$B^- = B_o = 1,\ A^- = A_o = b_o,\ B^* = B_1 - f_{\leqslant}(b_1/U)B_o = \left[b_1 - f_{\leqslant}(b_1/U)\right]B_o + B_{-1} = B_{1,c},$

$A^* = A_{1,c},\ c = b_1 - f_{\leqslant}(b_1/U),\ \Delta^* = -/\xi_1 - b_1 + f_{\leqslant}(b_1/U)//B_1 = -f_{\leqslant}(b_1/U)/B_1$

adatokat szolgáltatja, vagyis az $\omega^* = \omega_{1,c}$ megoldást, amelynek hibája /2.65/ szerint valóban

$$\Delta^* = \Delta_{1,c} = -\frac{\xi_1 - c}{B_1} = -\frac{\xi_1 - b_1 + f_{\leqslant}(b_1/U)}{B_1} = -\frac{f_{\leqslant}(b_1/U)}{B_1}$$

és ezért

$f_{\leqslant}(b_1/U) = B_1|\Delta_{1,c}|$, vagyis $b_1|\Delta_{1,c}| \leqslant b_1/U$ és $|\Delta_{1,c}| \leqslant 2\alpha$,

azonban $B_1|\Delta_{1,c}| \leqslant' b_1/U - 1$, vagyis $|\Delta_{1,c}| + 1/B_1 \leqslant' 1/U = 2\alpha$.

De $|\Delta_{1,c}| + 1/B_1 = |\Delta_{1,c-1}|$, vagyis $|\Delta_{1,c-1}| \leqslant' 2\alpha$, ami megfelel a fentebbi /b/ eset szerinti helyes megoldásoknak. Ha itt $b_1 \leqslant' U$, azaz $2\alpha \leqslant' |\Delta_{1,b_1-1}|$, akkor c'=0, $c = b_1$, $\xi_1 - c = 0$ és $\Delta^* = 0$, ismét helyes eredményt ad $\omega^* = \omega_{1,b_1} = \omega_1 = \omega_n$ megoldással.

ν=1, r≠0, $B_1 > U$ esetén a 4.Lépésben az első algoritmus $U < B_1 < B_1'$ miatt $m=0,\ B^- = B_{-1} = 0,\ A^- = A_{-1} = 1,\ B^* = B_o = 1,\ A^* = A_o = b_o,$ $c = b_o,\ \Delta^* = 1/B_1'$ adatokkal a helyes $\omega^* = \omega_o$ eredményt adja, mert $\Delta_o=1/B_1' < 1/B_1 < 1/U = 2\alpha$ teljesül. A második algoritmus $c'=f_{\leq}(B_1'/U+b_1-\xi_1)$ értékkel ugyancsak helyes $\omega_1^*=\omega_{1,c}$ megoldást ad, hiszen

$$|\Delta^*|=|\Delta_{1,c}|=\frac{\xi_1-b_1+f_{\leq}(B_1'/U+b_1-\xi_1)}{B_1'}=\frac{f_{\leq}(B_1'/U)}{B_1'}\leq 1/U=2\alpha,$$

viszont

$$|\Delta_{1,c-1}|=|\Delta_{1,c}|+1/B_1'=\frac{f_{\leq}(B_1'/U)+1}{B_1'}\;{}'\!\!> \frac{1}{U}=2\alpha.$$

$\nu=2n$, $r=0$ esetén $n=2\mu$ páros. Az első algoritmus a $\xi_{2\mu}=b_{2\mu}$ egész miatt a $B'=B_{2\mu}'=B_{2\mu}$, $c'=f_{\leq}(B_{2\mu}/U)$,

$m=2\mu$, $B^-=B_{2\mu-1}$, $A^-=A_{2\mu-1}$, $B^*=B_{2\mu}-f_{\leq}(B_{2\mu}/U)B_{2\mu-1}=$

$=/b_{2\mu}-f_{\leq}(B_{2\mu}/U)/B_{2\mu-1}+B_{2\mu-2}=cB_{2\mu-1}+B_{2\mu-2}=B_{2\mu,c}$, $A^*=A_{2\mu,c}$,

$c=b_{2\mu}-f_{\leq}(B_{2\mu}/U)$, $\Delta^*=/\xi_o-b_{2\mu}+f_{\leq}(B_{2\mu}/U)//B_{2\mu}=f_{\leq}(B_{2\mu}/U)/B_{2\mu}$ adatokat szolgáltatja. Valóban

$\Delta^*=\Delta_{2\mu,c}=f_{\leq}(B_{2\mu}/U)/B_{2\mu}\leq 1/U = 2\alpha$, azonban

$\Delta_{2\mu,c-1}=/f_{\leq}(B_{2\mu}/U)+1//B_{2\mu}\;{}'\!\!> 1/U = 2\alpha$,

tehát a megoldás helyes. Ha $B_{2\mu}=1/\Delta_{2\mu,b_{2\mu}-1}\;\leq' U$, azaz $\Delta_{2\mu,b_{2\mu}-1}\;{}'\!\!> 1/U=2\alpha$, akkor $c'=0$, $c=b_{2\mu}$ és így $\omega^*=\omega_{2\mu}$, $\Delta^*=0$ helyes megoldás adódik.

A második algoritmus $U\leq B_{2\mu}$ esetén az $\omega^*=\omega_{2\mu-1}$ megoldást szolgáltatja $m=2\mu-1$, $B^-=B_{2\mu}-b_{2\mu}B_{2\mu-1}=B_{2\mu-2}$, $A^-=A_{2\mu-2}$,

$B^*=B_{2\mu-1}$, $A^*=A_{2\mu-1}$, $c=[A_{2\mu-1}/A_{2\mu-2}]=b_{2\mu-1}$, $\Delta^*=-1/B_{2\mu}'$

adatokkal, amely $B_{2\mu-1}\leq U$ miatt valóban helyes. Hiszen bármely $c<b_{2\mu-1}$ mellett $|\Delta_{2\mu-1,c}|\;{}'\!\!> 2\alpha$. Ez következik az alábbi relációsorból, amely a /2.42/ szerinti $B_\nu<B_\nu'<B_{\nu+1}$, $0\leq\nu\leq N-2$, egyenlőtlenségsor következménye: bármely $1\leq\nu<N-1$, $0<c<b_\nu$ mellett

$$B'_{\nu-1} < \frac{B'_\nu}{\xi_\nu - c} \leq \frac{B'_\nu}{\xi_\nu - b_\nu + 1} = \frac{\xi_{\nu+1} B'_\nu}{\xi_{\nu+1}+1} = \frac{B'_{\nu+1}}{\xi_{\nu+1}+1} = \frac{\xi_{\nu+1} B_\nu + B_{\nu-1}}{\xi_{\nu+1}+1} < B_\nu ,$$

vagyis

$$\ldots < \left(\frac{B'_\nu}{\xi_\nu}\right) B'_{\nu-1} < \frac{B'_\nu}{\xi_\nu - 1} < \ldots < \frac{B'_\nu}{\xi_\nu - b_\nu + 1} < B_\nu < B'_\nu < B_{\nu+1} < B'_{\nu+1} \left(= \frac{B'_\nu}{\xi_\nu - b_\nu}\right) < \ldots$$

Mivel $B_{2\mu-1} \leq U$ és $1/|\Delta_{2\mu-1,c}| = B'_{2\mu-1} // \xi_{2\mu-1} - c / \lessdot B_{2\mu-1} \leq U$, valóban $|\Delta_{2\mu-1,c}| \mathrel{'\gg} 2\alpha$. $B'_{2\mu} = B_{2\mu} \lessdot' U$ esetén azonban $|\Delta_{2\mu-1, b_{2\mu-1}}| \doteq$ $\doteq |\Delta_{2\mu-1}| = 1/B_{2\mu} \mathrel{'\gg} U$, ezért a megoldás $\omega^* = \omega_{2\mu} = \omega_n$ és a második algoritmusból valóban

$m=2\mu$, $B^- = B_{2\mu-1}$, $A^- = A_{2\mu-1}$, $B^* = B_{2\mu}$, $A^* = A_{2\mu}$, $c = b_{2\mu}$, $\Delta^* = 0$

helyes adatok származnak. $\nu = 2\mu$, $r \neq 0$ és $B_{2\mu} > U$ esetén az első algoritmus ugyanazt a helyes $\omega^* = \omega_{2\mu,c}$ megoldást adja, amit $r=0$ esetben. A második algoritmus $B'_{2\mu} > B_{2\mu} > U$ miatt eleve az $\omega^* = \omega_{2\mu-1}$ megoldást adja, aminek helyessége ugyanúgy igaz, mint az $r=0$ esetben.

$\nu = 2\mu + 1$, $r = 0$ esetben $n = 2\nu + 1$ páratlan. Ekkor $\xi_{2\mu+1} = b_{2\mu+1}$, $B'_{2\mu+1} = B_{2\mu+1}$. Az első algoritmus $U \lessdot B_{2\mu+1}$ esetén, ami megfelel $\Delta_{2\mu} \lessdot 2\alpha$ relációnak, az $\omega^* = \omega_{2\mu}$ megoldást szolgáltatja. Ez helyes, mert $c < b_{2\mu}$ esetén $1/\Delta_{2\mu,c} =$ $= B'_{2\mu} // \xi'_2 - c / \lessdot B_{2\mu} \leq U$, azaz $\Delta_{2\mu,c} \mathrel{'\gg} 2\alpha$ az előző 3. Lépés $B_{2\mu} \leq U$ relációja következtében. $B_{2\mu+1} \lessdot' U$ esetén $\Delta_{2\mu} \mathrel{'\gg} 2\alpha$, ezért a megoldás $\omega^* = \omega_n = \omega_{2\mu+1}$ és az első algoritmus valóban

$m=2\mu+1$, $B^- = B_{2\mu}$, $A^- = A_{2\mu}$, $B^* = B_{2\mu+1}$, $A^* = A_{2\mu+1}$, $c = b_{2\mu+1}$, $\Delta^* = 0$

helyes adatokat szolgáltat. A második algoritmus

$c' = f_{\lessdot}(B_{2\mu+1}/U)$, $m=2\mu+1$, $B^- = B_{2\mu}$, $A^- = A_{2\mu}$,

$B^* = B_{2\mu+1} - f_{\lessdot}(B_{2\mu+1}/U) B_{2\mu} = /b_{2\mu+1} - f_{\lessdot}(B_{2\mu+1}/U)/B_{2\mu} + B_{2\mu-1} = B_{2\mu+1,c'}$

$A^{*}=A_{2\mu+1,c}$, $c=b_{2\mu+1}-f_{\leq}(B_{2\mu+1}/U)$, $\Delta^{*}=-f_{\leq}(B_{2\mu+1}/U)/B_{2\mu+1}$

adatokat szolgáltat, amelyek az $\omega^{*}=\omega_{2\mu+1,c}$ adatai. Ennek helyessége az előzőkhöz hasonlóan igazolható.

Végül teljesen analóg láthatjuk be az algoritmusok helyességét $\nu=2\mu+1$, $r \neq \theta$, de $B_{2\mu+1} > U$ esetben is.

<u>Nem homogén KIF</u> megoldásával itt nem foglalkozunk. Általános megoldási algoritmust nem tudunk adni, azonban a 4. és az 5. Fejezetben az ütemezési problémák kapcsán olyan módszereket fogunk adni, amelyek nem homogén KIF-ek megoldására használhatók. Ezek az euklideszi algoritmus és a lánctörtfejtés általánositásának tekinthetők.

3. Definiciók és általános tételek.

Ebben a fejezetben az 1. Fejezet 1.1. és 1.2. pontjaiban tárgyaltak szerint definiálunk egy ütemezési modellt, amelyet szabályos job-folyam pár ütemezési problémájának nevezünk el. Ez speciális esete az 1.6. pontban definiált job-folyamok ütemezési problémájának. Tudomásunk szerint ezzel a problémával eddig nem foglalkoztak, legalábbis determinisztikus esetben nem. A szabályos job-folyam pár ütemezési problémája a legegyszerübb speciális esete a job-folyamok ütemezési problémáinak. E problémák nehézsége azonban szükségessé teszi először a legegyszerübb eset tisztázását. A legegyszerübb eset jellegzetességei és a megoldáshoz vezető módszerek - ha közvetlenül nem is általánosithatók - segitséget adhatnak kettőnél több job-folyam ütemezésének vizsgálatához.

Az 1.6. pont szerinti osztályozásban a továbbiakban a $\mathcal{T}_B$ eset speciális esetét tekintjük két job-folyamra. Ebben az esetben a P_B-processzorokon ütemezési konfliktus nem léphet fel, mert azokból elegendő áll rendelkezésre. A P_A processzor iránt azonban egyszerre több igény is támadhat és az ütemezési döntés feladata az ütköző igények időbeni elosztása.

Vizsgálatunk célkitüzése a különféle lehetséges ütemezések mellett a P_A processzor kihasználtságának meghatározása, illetve maximalizálása. A kihasználtságon az /1.2/ alatt definiált határértéket értjük, amely esetünkben mindig létezik. Bevezetve a $\tau^A]a,b[$ jelölést az $]a,b[$ időszakaszon a P_A processzor aktivitási idejére, $\tau^A(t)=\tau^A[0,t)$ egyszerüsitéssel egy ütemezés hatékonyságát a

/3.1/ $$\gamma = \lim_{t\to\infty} \frac{\tau^A(t)}{t}$$

határértékkel definiáljuk.

3.1. Szabályos job-folyam pár és megengedhető ütemtervei.

Legyen $Q^{(i)}=\{(A_{ij}, B_{ij}), j=1,2,\dots\}$ a $C=(A,B)$ task-párok egy megszámlálhatóan végtelen sorozata. Mindegyik task meghatározott ideju kiszolgálást igényel meghatározott tipusú processzortól. Az A és B task-ok abban különböznek, hogy az általuk igényelt processzorok tipusa különböző. A $Q^{(i)}$ task-pár sorozatot nevezzük job-folyamnak.

Ilyen job-folyammal modellezhetők olyan számitógépen feldolgozott programok /job-ok/, amelyek igen nagyszámú task-párból állnak, vagy egymás után csatlakozó job-ok sorozatai /folyamai/. Ilyen modellel irhatók le olyan gépek, amelyek rendszeres időközönként bizonyos ellenőrzést és karbantartást kivánnak /A-task/ , közben pedig megszakitás nélkül végzik munkájukat /B-task/ . A számitógépen futó programnál az A-task-ok a központi egység /CPU/ iránti igényt, a B-task-ok az input-output /I/O/ igényt reprezentálják. Tipikus alkalmazása lehet még a modellnek a dialogus terminálok kiszolgálásának vizsgálata, ahol az A_{ij} task az i-edik terminál j-edik igénye a központtal szemben, B_{ij} pedig a választ követő gondolkodási idő. De job-folyammal modellezhető például egy ütemezési tevékenység is egy operációs rendszerben, ahol rendszeres időközönként döntést kell hozni az igények és erőforrások egymáshoz rendeléséről. Ez az A-task. A döntés egy meghatározott időre megszabja a müködést: B-task.

Jelölje P_A az A-task-ok, P_B a B-task-ok által igényelt processzor-tipust és $\mathcal{P}$ a rendelkezésre álló processzorok készletét /erőforrás/. Jelölje $Q=\{Q^{(i)}, i=1,2,\dots\}$ az ütemezendő job-folyamokat /igények/. Legyen $\tau^A_{ij} \geq 0$ és $\tau^B_{ij} \geq 0$ a $C_{ij}=(A_{ij}, B_{ij})$ task-pár igényének nagysága.

Szabályos job-folyamnál a $\tau^A_{ij}=\tau^A_i$, $\tau^B_{ij}=\tau^B_i$, $j=1,2,\dots$ igények mindegyik task-párnál azonósak. Ezek az igények előre ismertek /determinisztikus eset/.

Legyen $Q=(Q^{(1)}, Q^{(2)})$ egy job-folyam pár és álljanak rendelkezésre a $\mathcal{P}=(P_A, P_{B1}, P_{B2})$ processzorok. A job-folyamok szabályosak és igényeikre vezessük be az alábbi alternativ jelöléseket:

$$\tau^A_{ij}=\tau^A_i=\eta_i\ ,\quad \tau^B_{ij}=\tau^B_i=\vartheta_i\ ,\quad i=1,2,\quad j=1,2,\dots\ .$$

Magára a job-folyam párra is alternativ jelöléseket fogunk használni:

$$Q\doteq(Q^{(1)},Q^{(2)})\doteq\{C_{1j},C_{2j}\}\doteq\{(A_{1j},B_{1j}),(A_{2j},B_{2j})\}\doteq(C_1;C_2)\doteq(A_1;B_1;A_2;B_2).$$

Sok esetben az igények jelképezik a job-folyam-párt, ilyenkor használjuk a

$$Q=(\tau^A_1;\ \tau^B_1;\ \tau^A_2;\ \tau^B_2)\doteq(\eta_1;\ \vartheta_1;\ \eta_2;\ \vartheta_2)$$

jelöléseket. Ezt a négy igényt nevezzük a job-folyam pár paramétereinek. A paraméterek egy adott értékegyüttesét konfigurációnak nevezzük. Ha bármelyik paraméter értéke megváltozik, uj konfiguráció jön létre.

Vezessük be még a következő jelöléseket is:

$$\tau_1=\tau^A_1+\tau^B_1=\eta_1+\vartheta_1;\quad \tau_2=\tau^A_2+\tau^B_2=\eta_2+\vartheta_2;$$
$$\tau^A=\tau^A_1+\tau^A_2=\eta_1+\eta_2;\quad \tau^B=\tau^B_1+\tau^B_2=\vartheta_1+\vartheta_2;$$

Modellünkben bármelyik paraméter bármilyen nem-negativ véges valós értéket felvehet. Az összes konfigurációk tere, amelyet konfigurációtérnek nevezünk és $\mathcal{Q}$-val fogunk jelölni, az R^4 négy-dimenziós euklideszi tér

$$R^4_+=\{\eta_1\geq 0,\ \vartheta_1\geq 0,\ \eta_2\geq 0,\ \vartheta_2\geq 0\}$$

nem-negativ tizenhatoda.

Valamely paraméter 0 értéke azt jelenti, hogy a job-folyam párban a megfelelő task-tipus igénye 0, de nem jelenti annak hiányát. Az ilyen konfigurációt elfajultnak nevezzük. A 0 igényü task-tipust elfajult task-nak mondjuk. Ezzel modellezhetünk egy gyakorlatilag elhanyagolhatóan kicsiny igényü, de elengedhetetlen tevékenységet. Ha a $Q^{(i)}$ job-folyam mindkét task-ja elfajult, $Q^{(i)}$ degenerált job-folyam. Degenerált konfiguráció az, amelyiknél legalább egyik job-folyam degenerált.

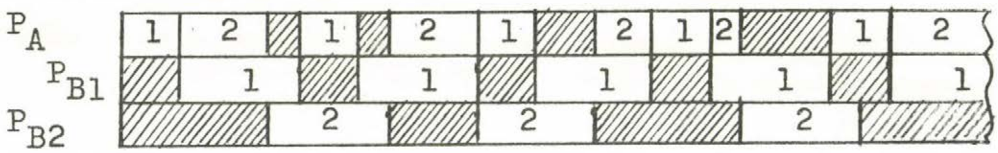
Speciálisan legyen a Q=0, nulla konfiguráció az, amelynél mindkét job-folyam degenerált. Az elfajult konfigurációk megengedése neheziti az ütemezési problémák tárgyalását, azonban később látjuk majd, hogy általános konfigurációk ütemezését sokszor ilyen konfigurációk ütemezésére vezethetjük vissza.

A Q job-folyam pár képezi az ütemezési problémánk igény oldalát. Az erőforrás oldal a $\mathcal{P}=(P_A,P_{B1},P_{B2})$ processzor-hármas. Az ütemezés a processzorok hozzárendelése az igényekhez úgy, hogy egyidőben minden processzor legfeljebb egy igényt szolgáljon ki és minden igény csak a Q job-folyam pár sorozatban előtte álló igények kiszolgálása után szolgálható ki. Az ütemezési feltételektől függ, hogy a kiszolgálás megszakitható-e. Lehetséges minden olyan ütemezés, amely ezeknek a feltételeknek eleget tesz. Az ütemezéskor a 0 igényü task-ok ütemezésének pillanata és sorrendje is pontosan meghatározott. Az esetleges egyéb feltételeknek is eleget tevő ütemezéseket megengedhetőnek. Ilyen feltételeket rövidesen definiálni fogunk. Az 1.1. pontban elmondottakkal összhangban az ütemezés lehet egy döntési folyamat, vagy egy ütemterv, amely minden pillanatra megszabja, hogy melyik processzor melyik igényt szolgálja ki, illetve tétlen-e.

Az ütemezési stratégia az ütemezési tevékenység, vagy ütemterv elkészités folyamatát egyértelmüen meghatározó szabály, amely egy döntési előiráson, vagy algoritmuson keresztül valósul meg.

Jelölje egy $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációra $\mathcal{R}(Q)$ a megengedhető ütemtervek halmazát. Az $\mathcal{R} = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathcal{R}(Q)$ halmaz a megengedhető ütemtervek tere.

Egy ütemtervet általában a Gantt-diagrammal szemléltethetünk /I.3.1. Ábra/, amelyen a processzoroknak egy-egy időtengellyel párhuzamos sáv felel meg. A processzorok sorrendje mindig P_A, P_{B1}, P_{B2}, ezért ennek jelzését elhagyjuk. Az időegység jelölése is nélkülözhető általában, hiszen az ütemezés szempontjából csupán az igények relativ értéke lényeges. A tétlen szakaszokat sraffozott sávok



3.1. Ábra: Job-folyam pár ütemtervének Gantt-diagramja.

jelölik. Speciálisan 0 igényt egyetlen vonal jelezhet. "Csatlakozó" igényeknél az ilyen ábrázolás nem egyértelmü, ilyenkor a Gantt-diagramon egyéb jelzések is szükségesek lehetnek.

A $Q^{(i)}$ /i=1 2/ job-folyam $C_{ij}=(A_{ij}, B_{ij})$ /j=1,2,.../ task-párjának kiszolgálási igényét a job-folyam j-edik igényciklusának nevezzük. Ennek hossza $\tau_i \geq 0$ /degenerált esetben $\tau_i = 0$ /. Egy $R=R(Q)$ ütemtervben legyen $s(X)$ és $f(X)$ az X task, vagy $X=(A,B)$ task-pár kiszolgálásának első ill. utolsó pillanata /start-finish/. Az $[s(C_{ij}), f(C_{ij})]$ intervallumot a $Q^{(i)}$ job-folyam j-edik kiszolgálási ciklusának nevezzük. Ennek hossza

$$t_{ij} = f(C_{ij}) - s(C_{ij}) \geq \tau_i \geq 0.$$

Az ütemezés időben játszódik le és bármely <u>fázisában</u> definiálhatjuk az <u>ütemezés</u> Σ <u>állapotát</u>, mint a kiszolgálás addigi menetét, amely megfelel az ütemterv egy $[0,t)$ szakaszának. A Σ matematikai megadása elfajult igények, valamint 0 tartamú kiszolgálások esetén nem magától értetődő. Feltételezzük, hogy egy t pillanatbeli Σ állapot egyértelmüen meghatározza az összes $t'<t$ korábbi pillanatokbeli állapotot is. A Σ állapot tulajdonképpen események sorozata, amelyek között az előidejüség nem feltétlenül jelent eltérő bekövetkezési időpontot. Egy t pillanatban több esemény bekövetkezhet, amelyek az állapotok egy $\{\Sigma\}_t$ rendezett halmazát definiálják. A Σ_1 állapot <u>megelőzi</u> a Σ_2 állapotot, jelölésben $\Sigma_1 \prec \Sigma_2$, ha vagy Σ_1 egy korábbi halmazhoz tartozik, vagy egy halmazon belül sorrendben előbb következik. Definiáljuk a $t(\Sigma)$ függvényt, mint az állapot <u>hosszát</u>. $t(\Sigma')$ annak a $\{\Sigma\}_t$ halmaznak az indexe, amelyhez Σ' állapot tartozik.

Az ütemezés $\{\Sigma\}_t$ halmazok, illetve Σ állapotok rendezett sorozata /halmaza/, amelyet a Q konfiguráció és S ütemezési stratégia határoz meg. Jelölje ezt $\Sigma_{S,Q}$. Ez ekvivalens az $\mathcal{R}$ ütemtervek terének egy $R^{(S)}(Q)$ ütemtervével. A stratégiák egy $\mathcal{S}$ osztályára definiálhatjuk az $\Sigma_{\mathcal{S},Q} = \bigcup_{S\in\mathcal{S}} \Sigma_{S,Q}$ állapothalmazt. A Σ állapotok jellemzése elött további fogalmakat vezetünk be, majd néhány megállapodással szükitjük a megengedhető ütemezések terét.

A $\mathcal{P}=(P_A, P_{B1}, P_{B2})$ <u>processzor-hármas állapotát</u> jellemezze

$$\alpha = (\alpha_A, \alpha_{B1}, \alpha_{B2}) \quad \text{,ahol } \alpha_X = \begin{cases} 1, \text{ha X processzor foglalt} \\ 0, \text{ha X processzor tétlen} \end{cases}$$

vektor.

Jelölje $u \geq 0$ az α állapot eddigi tartamát az ütemezés egy fázisában. Legyen

$$p = (u; \alpha)$$

a $\mathcal{P}$ processzor-hármas jellemzése egy fázisban.
Legyen a

$$\beta = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)}) \quad , \text{ ahol } 0 \leq \beta^{(i)} \leq \tau_i, \ i=1,2,$$

vektor $\beta^{(i)}$ komponensének értéke a $Q^{(i)}$ job-folyam éppen kiszolgálás alatt álló /megkezdett, de be nem fejezett/ igényciklusának még hátralévő igénye minden pillanatban. Ha nincs megkezdett ciklus, akkor $\beta^{(i)} = 0$. Legyen a

$$v = (v^{(1)}, v^{(2)}) \quad , \text{ ahol } v^{(i)} = 0,1,2,$$

vektor $v^{(i)}$ komponense a $Q^{(i)}$ job-folyam aktuális ciklusából megkezdett task-ok száma. Ez csak akkor 0, ha nincs megkezdett task, egyébként jelzi a 0 igényü task-ok kiszolgálásának eseményét is. Ekkor a

$$q = (v; \beta)$$

vektor egyértelmüen jellemzi a Q job-folyam pár lokális állapotát az ütemezés egy fázisában. Legyen

$$\sigma = (p; q)$$

vektor az ütemezés szituációja egy fázisban. Minden Σ állapothoz tartozik egy $\sigma(\Sigma)$ szituáció, mint annak utolsó szituációja. Ugyanúgy, ahogyan a Σ állapotoknak, a szituációknak is egy $\{\sigma\}_t$ rendezett halmaza tartozik az ütemezés minden t pillanatához és az ütemterv t pontjához. $\sigma_1 \prec \sigma_2$ elõidejüség értelmezése $\Sigma_1 \prec \Sigma_2$ értelmezésével analóg. $t'=t(\Sigma)$ esetén $t(\sigma(\Sigma)) = t'$ a $\sigma(\Sigma)$ szituáció /egy/ fellépési helye.

Amig egy R ütemtervben nem lehet két azonos Σ állapot, addig lehetséges akárhány azonos σ szituáció. Használjuk még a $\sigma[t]$ és $\Sigma[t,\sigma]$ jelöléseket egy σ szituáció fellépési helyének feltüntetésére, ill. egy Σ állapot hosszának és utolsó szituációjának feltüntetésére.

Nevezzük egy R ütemterv lényeges pontjainak azokat a t' pillanatokat, amelyekben a processzorok α állapota változik /akár többször is/. Ezekben a pontokban $u(t) = 0$. Az $u(t)$ szakaszonként lineáris jobbról folytonos függvény. Az $\alpha(t)$ mint t függvénye "jobbról folytonos" olyan értelemben, hogy a lényeges pontok között konstans a t' lényeges pontbeli utolsó $\{\sigma\}_{t'}$-beli szituációban bekövetkező értékkel. Egy $\sigma[t']$ szituációban a $\beta^{(i)}(t') = \tau_i$, ha a σ szituációban éppen egy A_{ij} task kiszolgálása kezdődik és $\beta^{(i)}(t'+t) = \tau_i - t$, ha a $[t', t'+t)$ intervallumon megszakitás nélkül a C_{ij} igényciklus kiszolgálása folyik. Ha a C_{ij} igényciklus kiszolgálása szünetel, akkor $\beta^{(i)}(t)$ konstans. $\beta^{(i)}(t)$ függvény tehát jobbról folytonos, definició szerint. Ha $Q^{(i)}$ degenerált, akkor $\beta^{(i)}(t) \equiv 0$. Ha egy task kiszolgálása egy processzoron a t pillanatban befejeződik, akkor arra a pillanatra a processzor már szabad és másik task ütemezhető.

Egy 0 igényü task ütemezésekor a processzor még ugyanarra a pillanatra felszabadul. Ezért lehetséges többek között több esemény ugyanabban a pillanatban. A fentiek alapján beszélhetünk $\sigma(t)$ függvényről, amely a lényeges pontokban többértékü is lehet. Azonban $\sigma(t)$ folytonos a lényeges pontok között és jobbról folytonos a lényeges pontokban olyan értelemben, hogy egyik értéke a jobboldali határérték. Ugyanakkor $\sigma(t)$ az $u(t)$ növekedése miatt sosem konstans a lényeges pontok között. A $\sigma(t)$ tulajdonságaiból és a szituáció definiciójából következik, hogy ha akár egy

$R(Q)$, akár különböző $R(Q)$, $R'(Q)$ ütemtervek t_1 és t_2 pontjaiban $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$, akkor t_1 és t_2 pontok előtt azonos távolságban vannak az első megelőző lényeges t_1' ill. t_2' pontok és azokban az utolsó megelőző szituációkra $\sigma'(t_1') = \sigma'(t_2')$, és t_1 és t_2 vagy lényeges pontok, vagy köztük legalább egy lényeges pont van.

Definiáljunk most néhány jellegzetes szituációt.

Legyen $\sigma_0 \doteq 0$ az a szituáció, amelynek minden komponense 0. Legyen $\Sigma \doteq 0$ minden ütemterv előtti szituáció, amelyre $t(\Sigma) = 0$ és legyen definició szerint $\sigma(\Sigma) = 0$, ha $\Sigma = 0$. A $\{\sigma\}_0$ sorozatnak σ_0 mindig az első szituációja. σ_0 lényeges pontokban $t > 0$ mellett is felléphet. Ha σ_0 utolsó szituáció t' pontban, akkor van olyan $\varepsilon > 0$ pozitiv szám, hogy a $(t', t+\varepsilon)$ intervallumon $\sigma(t)$ minden komponense 0, kivéve $u(t)$ komponenset, amely lineárisan nő.

Azt mondjuk, hogy a t pontban a $Q^{(i)}$ job-folyam támasztja a $Q^{(3-i)}$ job-folyamot, vagy a $Q^{(3-i)}$ job-folyam támaszkodik a $Q^{(i)}$ job-folyamra és ott a β_i-szituáció lép fel /i=1,2/ , ha valamely A_{ij}, $A_{3-i,j}$ task-párra $f(A_{ij}) = s(A_{3-i,j'}) = t$ teljesül. A β_1- és β_2- szituációkat együtt β - szituációnak nevezzük és azt mondjuk, hogy $Q^{(1)}$ és $Q^{(2)}$ támaszkodnak. A t pontban az X és Y task-ok csatlakoznak, pontosabban az Y csatlakozik a X-hez, ha $f(X) = s(Y) = t$. Egy β_i -szituációban a $Q^{(i)}$ job-folyam késlelteti a $Q^{(3-i)}$ job-folyamot, ha a t fellépési pontja előtti utolsó B_{3-i}-task-ra $f(B_{3-i}) < t$, azaz korábban fejeződött be $f(A_i)$-nél.

Legyen $R \doteq R(Q) \in \mathcal{R}$ egy $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció megengedhető ütemterve. Nevezzük az R ütemterv egy szakaszának az ütemterv bármely két $\sigma[t] \prec \sigma'[t']$ szituációja közötti szakaszát és használjuk erre a

$$\Delta\Sigma_R \doteq \Delta\Sigma_R[t, \sigma, t', \sigma'] = \Delta\Sigma[t, \sigma, t', \sigma']$$

jelöléseket.

A $\sigma[t]$ szituációt a $\Delta\Sigma_R$ alsó határszituációjának nevezzük és nem számitjuk hozzá a szakaszhoz. A $\sigma'[t']$ szituációt a szakasz felső határszituációjának nevezzük és hozzászámitjuk a szakaszhoz. A t, ill. t' a szakasz alsó, ill. felső határpontja és $0 \leq t \leq t' \leq \infty$. t'-t a szakasz hossza. Speciálisan $\Delta\Sigma_R[0,0,t',\sigma'] = \Sigma_R[t',\sigma']$ az R állapota és $\Delta\Sigma_R[t,\sigma,\infty,\cdot] \triangleq \Delta\Sigma_R[t,\sigma]$ az ütemterv egy utolsó szakasza. $\Sigma_R[\infty,\cdot] = \Delta\Sigma_R[0,0] = \Delta\Sigma_R[0,0,\infty,\cdot] =$
$=R(Q)$. Ha t=t' és σ és σ' a $\{\sigma\}_t$ halmaznak ugyanaz az eleme, akkor legyen definició szerint

$$\Delta\Sigma_R[t,\sigma,t,\sigma] = \emptyset,$$

az üres halmaz. Ha azonban a $\{\sigma\}_t$ halmaznak egynél több eleme van és a $\sigma,\sigma' \in \{\sigma\}_t$ különböző elemeket reprezentálnak, akkor

$$\Delta\Sigma_R[t,\sigma,t,\sigma'] \neq \emptyset,$$

függetlenül attól, hogy σ és σ' értéke azonos-e, vagy nem /azonosak csak 0 értékkel lehetnek, ha legalább az egyik job-folyam degenerált/. Ha σ és σ' értéke azonos, σ, akkor

$$\Delta\Sigma_R = \Delta\Sigma_R[t,\sigma,t',\sigma] \quad, \ t' \geq t,$$

egy visszatérési szakasz, pontosabban a σ szituáció egy visszatérési szakasza. Ilyenkor σ az R ütemterv egy visszatérő szituációja. A t'-t hossz a σ visszatérési ideje. Ha t' a minimális $t' \geq t$ pont, ahol $\sigma \in \{\sigma\}_{t'}$, de σ új előfordulása, akkor t'-t a σ első visszatérésének ideje.

Nem feltétlenül ugyanannak az R ütemtervnek a

$$\Delta\Sigma_1 = \Delta\Sigma_1[t_1,\sigma_1,t_1',\sigma_1'] \quad \text{és} \quad \Delta\Sigma_2 = \Delta\Sigma_2[t_2,\sigma_2,t_2',\sigma_2']$$

két szakaszát kongruensnek mondjuk, ha $t_2'-t_2 = t_1'-t_1$, $\{\sigma\}_{t_1+t} = \{\sigma\}_{t_2+t}$, $0 < t < t_2' - t_2$, és az alsó és felső határpontokban a szakaszokhoz tartozó szituációk halmazai egyenlők.

A két szakasz <u>részben kongruens,</u> ha van olyan σ'' szituáció, amely mindkettőnél alsó határszituáció, vagy a szakasz szituációja és az ezutáni szakaszaik már kongruensek. A két szakasz kongruenciáját

$$\Delta\Sigma_1 = \Delta\Sigma_2,$$

részben kongruenciáját

$$\Delta\Sigma_1 \approx \Delta\Sigma_2$$

jelöli. Az utóbbi esetben

$$\Delta\Sigma[t_1'', \sigma'', t_1', \sigma_1'] = \Delta\Sigma[t_2'', \sigma'', t_2', \sigma_2'] .$$

Mindkettő magában foglalja a

$$\sigma_1' = \sigma_2'$$

egyenlőséget.

Vezessük be szakaszokra a <u>csatolás</u> müveletét. A $\Delta\Sigma_2[t_2, \sigma_2, t_2', \sigma_2']$ <u>csatolható</u> a $\Delta\Sigma_1[t_1, \sigma_1, t_1', \sigma_1']$ szakaszhoz, ha t_1' és t_2 végesek és $\sigma_1' = \sigma_2$. Legyen ennek jelölése

$$\Delta\Sigma_1 \oplus \Delta\Sigma_2 \doteq \Delta\Sigma[t, \sigma, t', \sigma'] ,$$

amelynek eredménye egy $\Delta\Sigma$ szakasz, ahol $t = t_1$, $\sigma = \sigma_1$, $t' = t_1' + t_2' - t_2$ és $\sigma' = \sigma_2'$. A $\Delta\Sigma$ egy rendezett állapothalmaz a $\Delta\Sigma_1$ és $\Delta\Sigma_2$ rendezett halmazok egyesitése úgy, hogy $\Delta\Sigma_1$ minden állapota megelőzi $\Delta\Sigma_2$ minden állapotát és $\Delta\Sigma_1$ és $\Delta\Sigma_2$ elemeinek egymás közötti relációja változatlan marad. A csatolás müveletével ütemterv szakaszokból új ütemtervet konstruálhatunk ugyanarra a Q konfigurációra.

Korábban láttuk, hogy ha két szituáció megegyezik, akkor azok egyenlő távolságra vannak egy-egy lényeges ponttól, amelyekben legalább az utolsó szituációk megegyeznek. Ebből következik, hogy bármely visszatérő szituáció létezésekor létezik lényeges pontbeli visszatérő szituáció is. Egy R ütemterv első visszatérő szituációja mindig lényeges pontbeli szituáció.

A hatékonyság szempontjából vizsgálva a lehetséges és megengedhető ütemezéseket, bizonyos osztályokat célszerü eleve kirekeszteni, mivel olyanok, amelyek a gyakorlatban érdektelenek és velük azonos, vagy nagyobb hatékonyságú egyéb ütemezés mindig létezik. Ezzel a megokolással alább két megállapodás formájában bizonyos megszoritásokat teszünk a megengedhető ütemezésekre.

<u>1. Megállapodás:</u> Pozitiv igény csak pozitiv idejü kiszolgálásra és véges sok intervallumra ütemezhető.

Ezzel a megszoritással elejét vesszük annak, hogy egy $\tau > 0$ igényü task-ot végtelen sokszor megszakitva és 0 pillanatokra ütemezzünk, ami gyakorlatilag kivihetetlen, elvileg pedig felesleges lehetőség lenne. E megállapodásból következik, hogy ha egy $\tau > 0$ /hátralévő/ igényü task-ot a t pillanatra ütemezünk, akkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy a kiszolgáló processzor a $[t, t+\varepsilon)$ intervallumban foglalt és megszakitás nélkül a szóbanforgó task-ot szolgálja ki. A $t+\varepsilon$ pillanatban a task igénye $0 \leq \tau - \varepsilon < \tau$. A megállapodásból az is következik, hogy megengedhető ütemtervben a lényeges pontok végesben nem torlódhatnak. E megállapodás nem zárja ki a 0 igényü task-ok ütemezését. Azokra vonatkozóan az alábbi megszoritással élünk.

<u>2. Megállapodás:</u> A P_A processzoron egyazon degenerált job-folyam /0 igényü/ task-jai nem ütemezhetők közvetlenül egymás után; közöttük a másik job-folyam A-task-jait kell ütemezni.

Ez is egy természetes megállapodás, amely elejét veszi annak, hogy egy degenerált job-folyam az ütemezésből kiszoritsa a másik job-folyamot. A nulla konfigurációra ez azt jelenti, hogy a két degenerált job-folyam A-task-jai csak felváltva ütemezhetők.

Az 1. és 2. Megállapodások eredményeként, a Q=0, nulla konfiguráció kivételével, egy $R(Q) \in \mathcal{R}$ ütemterv bármely t pontjában /az ütemezés t pillanatában/ a $\{\Sigma\}_t$ állapothalmaz és a $\{\sigma\}_t$ szituációhalmaz egyaránt véges. A megállapodásokból az is következik, hogy $\{\sigma\}_t$ halmaznak nem lehet két azonos eleme, kivéve, ha $Q^{(i)}$ job-folyam valamelyike degenerált. Bármely nem lényeges pontban a $\{\sigma\}_t$ egyetlen $\sigma(t)$ szituáció. A továbbiakban csak az 1. és 2. Megállapodásoknak is eleget tevő ütemezéseket és ütemterveket tekintjük megengedhetőnek. E két megállapodás lényegesen csökkenti az $\mathcal{R}(Q)$ számosságát, amely azonban még igy is nagy marad. A további szükitésére $\mathcal{R}(Q)$-nak később kerül sor.

Egy S <u>stratégiát</u> tekinthetünk egy $s(\Sigma')$ <u>döntésfüggvénynek</u> is, amelynek eredményeként meghatározottá válik a Σ' állapotot követő Σ'' állapot, vagy az állapotok egy $\{\Sigma\}$ halmaza /sorozata/. A $\{\Sigma\}$ halmazt teljesen meghatározza annak Σ'' utolsó eleme, tehát irhatjuk, hogy $\Sigma''=s(\Sigma')$ az S stratégia egy jellemzése. A Σ'' állapot éppen a $\Delta\Sigma[t',\sigma',t'',\sigma'']$ szakasz szituációit határozza meg, ahol $t'=t(\Sigma')$, $\sigma'=\sigma(\Sigma')$, $t''=t(\Sigma'')$, $\sigma''=\sigma(\Sigma'')$. A $\Delta\Sigma$ szituációkban ill. $\Sigma'\prec\Sigma\prec\Sigma''$ állapotokban az S stratégia szerinti döntés $s(\Sigma')$ által meghatározott. Egy $\mathcal{S}=\{S\}$ stratégia-osztály vonatkozásában egy $\Sigma\in\Sigma_{\mathcal{S},Q}$ állapotban az <u>ütemezés meghatározott,</u> ha van olyan $\Sigma'\prec\Sigma$, $\Sigma'\in\Sigma_{\mathcal{S},Q}$ állapot, hogy az $s(\Sigma')$ döntés minden $S\in\mathcal{S}$ esetén meghatározza az $s(\Sigma)$ döntést.

Ha egy $\Sigma'\in\Sigma_{\mathcal{S},Q}$ állapotban a $\Sigma''=s(\Sigma')$ döntések a különböző $S\in\mathcal{S}$ stratégiáknál különbözők lehetnek, akkor a Σ' <u>állapotot kritikusnak</u> nevezzük az $\mathcal{S}$ osztály vonatkozásában. A megfelelő $\sigma'=\sigma(\Sigma')$ utolsó szituációkat <u>kritikus szituációknak</u>, és kritikus állapotokban hozható döntéseket <u>kritikus döntéseknek</u> nevezzük.

A kritikus szituációk fellépési helyei a <u>kritikus pontok.</u> Ha az $s(\Sigma)$ döntés csak a $\sigma(\Sigma)$ utolsó szituációtól függ, használjuk az $s(\sigma)$ jelölést. Ha fel kivánjuk tüntetni a döntés helyét is, az $s(\Sigma[t])$, vagy $s(\sigma[t])$ jelölést használjuk, ha csak a helyét jelöljük, $s[t]$ jelölést használhatunk.

3.2. Megengedhető ütemtervek osztályozása.

Az alábbiakban néhány szempont szerint jellemezzük az $R \doteq R(Q) \in \mathcal{R}(Q)$ megengedhető ütemterveket és az azokat generáló stratégiákat. Bizonyitunk néhány lemmát azok tulajdonságaira vonatkozóan.

Elsősöris vezessük be az O_i , i=1,2, jelölést a Q=0 nulla konfiguráció két ütemtervére, amelyekben a $Q^{(1)}$ és $Q^{(2)}$ degenerált job-folyamokat a t=0 pontban ütemezzük mégpedig a 2. Megállapodásnak megfelelően felváltva $Q^{(1)}$ és $Q^{(2)}$ ciklusait. O_i ütemtervben az ütemezést a $Q^{(i)}$ job-folyam első C_{i1} ciklusával kezdjük.

Azt mondjuk, hogy az S stratégia rendelkezik a K tulajdonsággal, ha bármely $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációra alkalmazva az $R^{(S)}(Q)$ ütemterv rendelkezik a K tulajdonsággal. Vagyis egy stratégia tulajdonságait az általa generált ütemtervek közös tulajdonsága határozza meg. Egy S stratégiát elvileg definiálhatunk azáltal is, hogy minden $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációra megadjuk az $R^{(S)}(Q)$ ütemtervet. Az S tulajdonságait ekkor ezek közös tulajdonságai jellemzik. Ha egy S stratégia által generált egyetlen $R^{(S)}(Q)$ ütemterv nem rendelkezik K tulajdonsággal, akkor S nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Ez nem zárja ki azt, hogy $R^{(S)}(Q')$ ütemterv rendelkezzék ezzel a tulajdonsággal. Az alábbiakban néhány fontos tulajdonságot definiálunk.

Az S stratégiát <u>megszakitásosnak</u> /preemptive/ nevezzük, ha megengedi pozitiv igény ütemezését több diszjunkt intervallumba, azaz kiszolgálásának megszakitását.

Az S stratégiát <u>összefüggőnek</u> /non-preemptive/ nevezzük, ha minden task kiszolgálása megszakitás nélkül befejeződik, ha egyszer elkezdődött. 0 ideju megszakitás sincs megengedve.

Az S stratégia <u>szoros</u>, ha egy processzor soha nem tétlen, ha lenne legalább egy task, amely rá ütemezhető lenne. Ez azt jelenti, hogy a task kiszolgálásra kész és ütemezése megengedett lenne.

Az S stratégia <u>következetes</u>, ha azonos szituációval végződő állapotokban, a döntés mindig azonos szituáció-sorozatot eredményez, ha a döntés megengedett. Vagyis $\sigma(\Sigma'_1)=\sigma(\Sigma'_2)$ esetén a $\Sigma''_1=s(\Sigma'_1)$ és $\Sigma''_2=s(\Sigma'_2)$ állapotok olyanok, hogy a Σ'_1 és Σ''_1 és Σ'_2 és Σ''_2 közé eső $\Delta\Sigma_1$ és $\Delta\Sigma_2$ szakaszok kongruensek. Ha $\sigma(\Sigma''_1)=\sigma''_1$ és $\sigma(\Sigma''_2)=\sigma''_2$, akkor $\sigma''_1=\sigma''_2$ és $t(\Sigma''_1)=t''_1$, $t(\Sigma''_2)=t''_2$, $t(\Sigma'_1)=t'_1$, $t(\Sigma'_2)=t'_2$, $\sigma(\Sigma'_1)=\sigma(\Sigma'_2)=\sigma$ jelölésekkel

$$\Delta\Sigma[t'_1,\sigma,t''_1,\sigma''_1]=\Delta\Sigma[t'_2,\sigma,t''_2,\sigma''_2].$$

Ez alól kivétel csak akkor lehet, ha az azonos szituációban az azonos szakaszokat generáló döntés nem volna megengedett a 2.Megállapodás szerint. Ilyenkor első esetben akármilyen más döntés hozható, de utána minden ilyen szituációban következetesen ugyanaz a döntés.

Ha egy szoros stratégia generálta R(Q) ütemterv a 2.Megállapodás nélkül nem lenne szoros, akkor <u>kvázi-szorosnak</u> is mondhatjuk. Ugyanigy egy következetes stratégia generálta R(Q)ütemterv <u>kvázi-következetes</u>, ha a 2.Megállapodás nélkül nem lenne következetes. Ilyen esetek csak degenerált konfigurációnál fordulnak elő.

Egy $\mathcal{S}=\{S\}$ <u>stratégia-osztályt következtesnek</u> nevezünk, ha bármely $Q\in\mathbf{Q}$ konfiguráció mellett a kritikus $\Sigma'\in\Sigma_{\mathcal{S},Q}$ állapotokban azonos a kritikus döntések készlete és az kizárólag a $\sigma(\Sigma')$ utolsó /kritikus/ szituációtól függ.

Az R és R' / R, R'$\in\mathcal{R}$ / megengedhető ütemterveket akkor tekintjük azonosaknak, ha $\Sigma_R = \Sigma_{R'}$, azaz állapotaik halmaza ugyanaz. Ehhez R, R' $\in \mathcal{R}(Q)$, valamely $Q\in\mathcal{Q}$-ra, nem szükséges feltétel. R és R' azonosságát jelölje R=R'.

Az R' és R'' megengedhető ütemterveket lényegében azonosaknak nevezzük, ha van R'-nek egy $\Sigma_{R'}[t', \sigma]$ és R''-nek egy $\Sigma_{R''}[t'', \sigma]$ állapota úgy, hogy attól kezdve a két ütemterv azonos. Vagyis $\Delta\Sigma_{R'}[t', \sigma] = \Delta\Sigma_{R''}[t'', \sigma]$, az utolsó szakaszok megegyeznek. Az R' ütemterv szituációhalmaza a $t'+t$ pontban azonos az R'' ütemterv $t''+t$ pontbeli szituációhalmazával minden $t>o$ mellett: $\{\sigma\}_{t'+t} = \{\sigma\}_{t''+t}$. Az ütemtervek azonossága és lényegében azonossága a szakaszok kongruenciájának és részben kongruenciájának kiterjesztése teljes ütemtervekre.

Egy R ütemtervet periodikusnak nevezünk, ha van olyan véges hosszuságú Σ'_R állapota, hogy attól kezdve az állapotok $\sigma(\Sigma)$ utolsó szituációi periodikusan visszatérnek. A legelső ilyen Σ'_R állapotot az R előperiodusának nevezzük és annak legyen $T_R = t(\Sigma'_R)$ a hossza. A Σ'_R utáni szituációk közös minimális visszatérési idejét tekintjük az R periodushosszának, amelyet p_R fog jelölni. Az ütemterv bármely T_R utáni p_R hosszuságú szakasza az R egy periodusa. Nyilván $T_R \geq o$ és $p_R \geq 0$. A T_R az R-nek mindig lényeges pontja. A 2.Megállapodás következménye, hogy $p_R=0$ kizárólag a Q=0 nulla konfiguráció ütemterveinél fordulhat elő. Könnyü látni, hogy ennek $R\approx O_i$, i=1 vagy 2, szükséges és elegendő feltétele. A definicióból következik, hogy a periodikus ütemtervnél

$$\{\sigma\}_{t+kp_R} = \{\sigma\}_t \,, \quad t>T_R \,, \quad k=1,2,\ldots .$$

A T_R és p_R a periodikus R ütemterv jellemzői.

Most néhány lemmát bizonyitunk:

3.1. Lemma: Ha $R \approx R'$, akkor a két ütemterv hatékonysága azonos:

$$\gamma_R = \gamma_{R'}, \text{ ha } R \approx R'.$$

Bizonyitás: Legyen $t \gg \max.(t_R, t_{R'})$ és legyen $t' = t_{R'} - t_R + t$. Ekkor t és t' egyszerre tartanak ∞ -hez és $t - t_R = t' - t_{R'}$. Mivel R-nek a $[t_R, t)$ és R'-nek a $[t_{R'}, t')$ szakaszai azonosak, ott $\tau_R^A(t_R, t) = \tau_{R'}^A(t_{R'}, t')$ is teljesül. Azonban $\tau_R^A(t_R, t) = \tau_R^A(t) - \tau_R^A(t_R)$ és hasonlóan R'-re. $\tau_R^A(t_R) \leq t_R$ és $\tau_{R'}^A(t_{R'}) \leq t_{R'}$, korlátosak. Ezekből következően

$$\gamma_R \doteq \lim_{t \to \infty} \frac{\tau_R^A(t)}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{\tau_R^A(t) - \tau_R^A(t_R)}{t + t_{R'} - t_R} =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\tau_{R'}^A(t') - \tau_{R'}^A(t_{R'})}{t} = \lim_{t' \to \infty} \frac{\tau_{R'}^A(t')}{t'} \doteq \gamma_{R'}$$

Q.e.d.

3.2. Lemma: Ha $R \approx R'$, akkor R és R' csak egyszerre lehetnek periodikusak, azonos periodusokkal.

Bizonyitás: Az állitás következik az $R \approx R'$ lényegében azonosság és a periodicitás definiciójából.

Q.e.d.

3.3. Lemma: Ha az $R = R(Q)$ ütemtervnek nincs visszatérő szituációja, akkor R következetes.

Bizonyitás: Az állitás közvetlen következménye a következetes ütemterv definiciójának, hiszen nem lévén R-ben két azonos szituáció, a megfelelő állapotokban a döntések azonosságának kérdése fel sem merülhet.

Q.e.d.

3.4. Lemma: Periodikus R=R(Q) ütemterv minden periodusában bármelyik $Q^{(i)}$, i=1,2, job-folyamnak egész μ_i számú igényciklusa kerül kiszolgálásra és minden periodusban ugyanannyi.

Bizonyitás: A Σ_R' előperiodus után bármely periodus elején és a rákövetkező periodus elején azonos a szituáció és igy annak $q=(v,\beta)$ komponense is. Ez azt jelenti, hogy a periodus mentén $q^{(i)}=(v^{(i)}, \beta^{(i)})$ vagy végig azonos volt, amikoris $Q^{(i)}$ job-folyam $\mu_i=0$ periodusa került kiszolgálásra, vagy változott. A $\beta^{(i)}(t)$ függvény azonban a $(o, \tau_i]$ értékkészlet tartományban folytonosan változik, kivéve a $o \to \tau_i$ ugrásokat, vagyis ugyanazt az értéket csupán egy teljes ciklusnyi kiszolgálás után veheti fel újra. Igy a kiszolgált ciklusok száma μ_i egész. Ez i=1,2 mellett külön-külön igaz. Ha különböző periodusokban μ_i nem lenne azonos, akkor a periodusok nem lehetnének kongruens szakaszok.

Q.e.d.

A lemmában szereplő μ_1 és μ_2 egészeket a periodus ciklusszámainak nevezzük. Ezek is a periodikus ütemtervek jellemzői a T_R és p_R jellemzők mellett.

További jellemzőként definiáljuk a periodikus ütemterv P_A-foglaltságaként a P_A processzor aktivitási idejét egy periodusban. Jelölje ezt a_R . Ez nyilván minden periodusban azonos és

/3.2/ $$a_R = \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2 .$$

Egy periodus P_A-kihasználtsága nyilván a_R/p_R

3. Megállapodás: Periodikus ütemtervnél $a_R = 0$ mellett legyen mindig $a_R/p_R = 0$, p_R értékétől függetlenül.

Ez a megállapodás praktikus célt szolgál csupán, hogy a $p_R = 0$ esetet ne kelljen kivételként kezelni.

3.5. Lemma: Periodikus R ütemterv γ_R hatékonyságát a

/3.3/ $$\gamma_R = \frac{a_R}{p_R}$$

formula szolgáltatja.

Bizonyitás: A nulla konfiguráció ütemterveinél a /3.1/ definició szerint $\gamma_R=0$. A 3. Megállapodás biztositja, hogy /3.3/ szerint ugyanezt kapjuk $p_R = 0$ esetben is. Ha Q nem a nulla konfiguráció, akkor $p_R > 0$ és a /3.3/ jobboldala értelmezve van. Legyen $t \gg T_R$ és legyen a_o az R P_A-foglaltsági ideje a $[0,T_R)$ előperiodusban.
Nyilván $a_o \leq T_R$, korlátos. Legyen

$$n = \left[\frac{t-T_R}{p_R} \right] .$$

Ekkor $t=T_R+np_R+p_R'$, ahol $0 \le p_R' < p_R$ korlátos és $\tau_R^A(t) = a_o + na_R + a_R'$, ahol $0 \le a_R' \le a_R$, a P_A-foglaltság a $[T_R+n\,p_R, t)$ szakaszon, korlátos. t és n egyszerre tartanak végtelenhez, ezért

$$\gamma_R = \lim_{t\to\infty} \frac{\tau_R^A(t)}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_o+na_R+a_R'}{T_R+np_R+p_R'} = \frac{a_R}{p_R} \; .$$

Q.e.d.

3.6. Lemma: A nulla konfiguráció szoros ütemtervei csak az O_1 és az O_2, amelyek következetesek és periodikusak $p_R = 0$ periodushosszal.

Bizonyitás: A lemma azonnal következik a szoros ütemterv definiciójából.

Q.e.d.

3.7. Lemma: A Q=0 nulla konfiguráció következetes R ütemterve mindig periodikus $\Sigma_R'=0$ előperiodussal, $p_R = \max/\, s(B_{11}), s(B_{21})/ \ge 0$ periodushosszal és $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ciklusszámmal. $p_R = 0$ akkor és csak akkor, ha $R=O_i\, /i=1,2/$.

Bizonyitás: A 2.Megállapodás szerint a Q=0 nulla konfigurációnál az A_{1j} és A_{2j} task-ok a P_A processzorra csak felváltva ütemezhetők. Igy az első A_{i1} task megválasztása meghatározza az A-task-ok ütemezésének sorrendjét. Egy B_{ij} task sosem ütemezhető az A_{ij} előtt és A_{ij+1} a B_{ij} előtt. E feltételek mellett legyen A_{11}, B_{11}, A_{21}, B_{21} ütemezve és legyen B_{i1} az utolsó.

Legyen $s(X_{i1}) = f(X_{i1}) = t'_{X_{i1}}$ az X_{i1} task ütemezési pillanata. A $t'_{B_{i1}}$ pillanatban visszatér a $\sigma_0 = 0$ szituáció és a következetesség miatt innen kezdve az ütemtervben az összes szituációnak ismétlődnie kell a $\sigma[0] = \sigma_0$ szituációtól kezdve. Vagyis valóban $T_R=0$ és p_R =max / $s(B_{11})$, $s(B_{21})$/ jellemzőkkel R periodikus.

Q. e. d.

3.8. <u>Lemma:</u> Következetes R ütemterv akkor és csak akkor periodikus, ha van visszatérő szituációja.

<u>Bizonyitás:</u> Periodikus ütemterv T_R utáni minden szituációja definició szerint visszatérő. Legyen R egy következetes ütemterv. Ha Q=0, akkor a 3.7. Lemma szerint periodikus. Legyen tehát $Q \neq 0$. Tegyük fel, hogy σ az R visszatérő szituációja. Ha $Q^{(1)}$ vagy $Q^{(2)}$ degenerált, akkor könnyü belátni, hogy következetes ütemtervnek van $\sigma[t_1] = \sigma[t_2]$, $t_1 < t_2$, visszatérő szituációja is, ha pedig egyik job-folyam sem degenerált, akkor a visszatérő szituációra csak $t_1 < t_2$ lehet két fellépési pontra. Ekkor t_1 és t_2 előtt az azonos távolságra lévő első lényeges pontokban is azonos szituációk vannak. Ugyanakkor a következetesség miatt t_1 és t_2 után is azonos távolságra azonos $\{\sigma\}t'_i$ szituációhalmazoknak kell lenniök. Igy az ott hozott döntések azonossága folytán a következő lényeges pontokig ismét azonos szituációszakaszok következnek. Ilymódon véges döntés után a t_1 előtti lényeges pontból a t_2 előtti lényeges pontba érünk és közben a t_2 utáni szakaszon a szituációk teljesen azonosaknak bizonyulnak a t_1 utáni szakaszon lévőkkel.

Vagyis a $\Delta\Sigma[t_1, \sigma, t_2, \sigma] = \Delta\Sigma[t_2, \sigma, 2t_2-t_1, \sigma]$ azonosság /kongruencia/ teljesül. Teljes indukcióval a $t \geq t_1$ szakasz periodicitását igy bizonyitottuk. Ebből az állitás következik, hiszen akkor T_R véges előperiodus biztosan létezik.

Q.e.d.

3.9. Lemma: Következetes periodikus R ütemterv periodusának minden szituációja különböző, kivéve esetleg az olyan konfigurációt, amelyben van degenerált job-folyam. Az utóbbinál σ_o kétszer felléphet.

Bizonyitás: Legyen R egy következetes periodikus ütemterv $p_R \geq 0$ periodushosszal. Ha $p_R = 0$, akkor a 3.7. Lemma szerint $R = O_i$ /i=1,2/ . Ebben σ_o kétszer lép fel minden periodusban. Legyen $p_R > 0$. Tegyük fel, hogy σ szituáció egy perioduson belül visszatér. Ha a visszatérés ugyanabban a pontban történik, akkor valamelyik job-folyamnak degeneráltnak kell lennie és σ csak $\sigma_o = 0$ lehet. Legyen tehát $t_2 > t_1$ a σ két fellépési pontja egy perioduson belül. Vagyis
$T_R \leq t_1 < t_2 < t_1 + p_R$. A 3.8. Lemma bizonyitása szerint ekkor R periodikus $p_R' \doteq t_2 - t_1 < p_R$ periodushosszal is, ami ellentmond p_R definiciójának.

Q.e.d.

3.10. Lemma: Bármely $R \in \mathfrak{R}$ ütemterv visszatérési szakaszán a job-folyamok egész számú igényciklusa kerül kiszolgálásra.

Bizonyitás: A bizonyitás teljesen analóg a 3.4. Lemma bizonyitásához, ahol tulajdonképpen azt használtuk ki, hogy minden periodus egy visszatérési szakasz.

Q.e.d.

3.3. Dominancia tételek

Az előző pontban definiáltuk a megengedhető ütemtervek és stratégiák néhány lehetséges tulajdonságát és velük kapcsolatos néhány lemmát. Most ezeket felhasználjuk arra, hogy a megengedhető ütemtervek terét szükitsük úgy, hogy a szükitett osztályban mindig legyen optimális ütemterv. Erre a dominancia elvet használjuk.

A $Q \in \mathfrak{Q}$ konfiguráció $R'(Q)$ ütemterve dominálja az $R(Q)$ ütemtervét, $R'(Q)$ domináns $R(Q)$-val szemben, ha

$$\gamma_{R'}(Q) \geq \gamma_R(Q).$$

Az S' stratégia dominálja az S stratégiát, ha bármely $Q \in \mathfrak{Q}$ konfiguráció esetén $R^{(S')}(Q)$ dominálja $R^{(S)}(Q)$-t.

Az ütemtervek egy $\mathfrak{R}'(Q) \subset \mathfrak{R}(Q)$ osztálya domináns, ha bármely $R \in \mathfrak{R}(Q)$ ütemtervhez van $R' \in \mathfrak{R}'(Q)$ ütemterv úgy, hogy R' dominálja R-et. Legyen $\mathfrak{R}'(Q) \subset \mathfrak{R}''(Q) \subset \mathfrak{R}(Q)$. Az ütemtervek $\mathfrak{R}'(Q)$ osztálya domináns $\mathfrak{R}''(Q)$-val szemben, $\mathfrak{R}'(Q)$ dominálja $\mathfrak{R}''(Q)$-t, ha bármely $R'' \in \mathfrak{R}''(Q)$-hoz van $R' \in \mathfrak{R}'(Q)$ úgy, hogy R' dominálja az R''-t. Ha az $\mathfrak{R}''(Q)$ osztályt a K tulajdonság határozza meg, akkor a fenti tulajdonságú $\mathfrak{R}'(Q)$ osztályt K-dominánsnak mondjuk.

A $Q \in \mathfrak{Q}$ konfiguráció $R^*(Q)$ ütemterve optimális, ha $R^*(Q) \in \mathfrak{R}(Q)$ és

$$\gamma_{R^*}(Q) \geq \gamma_R(Q) \text{ minden } R \in \mathfrak{R}(Q) \text{ mellett.}$$

Legyen $\mathfrak{R}''(Q) \subset \mathfrak{R}(Q)$ a K tulajdonságú ütemtervek osztálya. Az $R^*(Q)$ ütemterv K-optimális, ha $R^*(Q) \in \mathfrak{R}''(Q)$ és

$$\gamma_{R^*}(Q) \geq \gamma_{R''}(Q) \text{ minden } R'' \in \mathfrak{R}''(Q) \text{ mellett.}$$

Ha $\mathfrak{R}'(Q)$ osztály domináns és $R^*(Q) \in \mathfrak{R}'(Q)$ ütemtervre

$$\gamma_{R^*}(Q) \geq \gamma_{R'}(Q) \quad \text{minden } R' \in \mathfrak{R}'(Q) \text{ mellett,}$$

akkor $R^*(Q)$ optimális. Ezt a tényt használja ki a dominancia elv: optimális ütemtervet elegendő domináns osztályon belül keresni, K-optimális ütemtervet elegendő K-domináns osztályon belül keresni. A dominancia elv azt is jelenti, hogy optimális ütemezés keresésekor mindig kizárhatunk a vizsgálatból olyan ütemezéseket, amelyeknél nem rosszabb ütemterv minden konfigurációnál marad vizsgálatunk körében.

Vezessük be a $Q^{(i)}$ job-folyam P_A-igényének mértékeként a

$$/3.4/ \qquad \gamma^{(i)} = \tau_i^A / \tau_i \leq 1 \qquad / = 0, \text{ ha } \tau_i = 0/$$

mennyiséget, ha $\tau_i > 0$. Legyen definició szerint $\gamma^{(i)} = 0$, ha $\tau_i = 0$, azaz $Q^{(i)}$ degenerált. Nyilvánvalóan $\gamma^{(i)} \leq 1$, hiszen $\tau_i = \tau_i^A + \tau_i^B \geq \tau_i^A$.

Egy bármilyen lehetséges $R(Q)$ ütemterv γ_R hatékonyságára igaz a

$$/3.5/ \qquad \gamma_R \leq \min/ 1, \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}/$$

becslés, amely γ_R és $\gamma^{(i)}$ mennyiségek definiciója alapján nyilvánvaló.

A /3.1/ definicióból következik, hogy bármely R ütemterv hatékonyságát annak nem korlátos szakasza határozza meg. Ha R és R' ütemtervek csak véges szakaszokon térnek el egymástól, akkor hatékonyságuk azonos a 3.1. Lemma szerint. Ezért egy R(Q) ütemterv bármely véges szakaszát megváltoztathatjuk úgy, hogy érvényes/elfogadható/ ütemterv maradjon, ezzel hatékonysága nem változik meg.

3.1. Tétel: Az $R \doteq R(Q) \in \mathfrak{R}(Q)$ ütemterv dominálható valamely $R'' \doteq R''(Q) \in \mathfrak{R}(Q)$ következetes ütemtervvel, ha az alábbi feltételek közül legalább egyik teljesül:

(a) a Q elfajult

(b) az R-nek egy $\Delta\Sigma_R[t', \sigma']$ utolsó szakasza következetes

(c) az R-nek egy $\Delta\Sigma_R[t, \sigma, T, \sigma]$, $T>t$, visszatérési szakaszán a P_A-kihasználtság nem rosszabb az R hatékonyságánál, azaz

$$\tau^A(t, T)/(T-t) \geq \gamma_R.$$

Az R" ütemterv összefüggő, ha R az és periodikus, ha R az, vagy (a) vagy (c) feltétel teljesül.

Bizonyitás:

(a) Elfajult konfigurációkra az állitás az esetek egyszerü vizsgálatával belátható. Mindig létezik a tétel feltételeinek eleget tevő R"(Q) ütemterv.

Nem elfajult esetben a bizonyitás menete az, hogy először a (c) esetet visszavezetjük a (b) esetre, ahol a következetes $\Delta\Sigma[t', \sigma']$ utolsó szakasz periodikus. Ezután a (b) esetnél bizonyitjuk, hogy véges szakasz változtatásával R(Q)-ból egy következetes R"(Q) konstruálható.

Elöszöris jegyezzük meg, hogy a t', t és T pontokat lényeges pontoknak vehetjük. A (b) esetben ugyanis $\Delta\Sigma_R[t', \sigma']$ következetessége esetén következetes a t' utáni első lényeges pont határolta utolsó szakasz is. A (c) esetben a t és T pontok előtt azonos távolságra vannak az azokat megelőző lényeges pontok, ahol az utolsó szituációk azonosak, sőt a $\sigma(t)$ szituáció függvény speciális jobbról folytonossága következtében az $\alpha_A(t)$ komponens konstans 0, vagy 1 érték.

Márpedig $\alpha_A(t)$ integrálja adja meg a P_A-foglaltságot. Ilymódon a $\Delta\Sigma_R[t,\sigma,T,\sigma]$ szakasz P_A-kihasználása azonos a közvetlen megelőző lényeges pontok határolta szakasz P_A-kihasználásával és egyszerre nem-rosszabbak γ_R-nél.

(c) Eset: Az eset visszavezetését a (b) esetre úgy végezzük, hogy a

$$\Sigma \doteq \Sigma[T,\sigma] = \Sigma[t,\sigma] \oplus \Delta\Sigma[t,\sigma,T,\sigma]$$

szakaszból /állapotból/ konstruálunk egy olyan

$$\Sigma' = \Sigma'[T',\sigma'] = \Sigma'[t',\sigma'] \oplus \Delta\Sigma'[t',\sigma',T',\sigma']$$

szakaszt, amelynél a

$$\Delta\Sigma' \doteq \Delta\Sigma'[t',\sigma',T',\sigma']$$

visszatérési szakasz következetes /nincs két egyforma szituációja/ és P_A-kihasználása nem rosszabb a

$$\Delta\Sigma \doteq \Delta\Sigma[t,\sigma,T,\sigma]$$

szakasz P_A-kihasználásánál. Ebben az esetben legyen

$$R'(Q) = \Sigma'[t',\sigma'] \oplus \Delta\Sigma'[t',\sigma'] \quad ,$$

ahol $\Delta t = T' - t'$ jelöléssel

$$\Delta\Sigma'[t',\sigma'] = \Delta\Sigma'[t',\sigma',t'+\Delta t,\sigma'] \oplus \Delta\Sigma'[t'+\Delta t,\sigma',t'+2\Delta t,\sigma'] \oplus \ldots$$

és

$$\Delta\Sigma'[t'+/k-1/\Delta t,\sigma',t'+k\Delta t,\sigma'] = \Delta\Sigma'[t',\sigma',T',\sigma'],\ k=1,2,\ldots$$

A $\Delta\Sigma'[t',\sigma']$ utolsó szakasz következetes és periodikus és $R'(Q)$ hatékonysága nem kisebb γ_R-nél, hiszen megegyezik a $\Delta\Sigma'$ szakasz P_A-kihasználásával.

A Σ szakaszból Σ' megkonstruálása szükség szerint ismételt lépésekben történik az alább leirtak szerint. Legyen

$$t_0 = t, \quad T_0 = T, \quad \sigma_0 = \sigma \quad \text{és}$$

$$\Sigma_0 = \Sigma_0[t_0,\sigma_0] \oplus \Delta\Sigma_0[t_0,\sigma_0,T_0,\sigma_0] \doteq \Sigma[t,\sigma] \oplus \Delta\Sigma[t,\sigma,T,\sigma] \ .$$

A Σ_o szakaszból kiindulva szükség szerint konstruáljuk a Σ_o, Σ_1, Σ_2, ... sorozatot, amelynek Σ_i tagjára igaz a következő:

$$\Sigma_i = \Sigma_i[T_i,\sigma_i] = \Sigma_i[t_i,\sigma_i] \oplus \Delta\Sigma_i[t_i,\sigma_i,T_i,\sigma_i];$$

t_i, T_i lényeges pontok; ha $i \geq 1$, akkor

$$\Delta\Sigma_i \doteq \Delta\Sigma_i[t_i,\sigma_i,T_i,\sigma_i]$$

visszatérési szakasz P_A-kihasználása nem rosszabb, mint a $\Delta\Sigma_{i-1}$ szakasz P_A-kihasználása; $\Delta\Sigma_i$ kevesebb lényeges pontot tartalmaz, mint $\Delta\Sigma_{i-1}$.

A Σ_o, Σ_1, ... sorozat $i \geq 1$ tagjainak konstrukciójára az alább definiálandó Vizsgálat 1 eredménye szerint kerül sor a Redukció 1 eljárásban.

<u>Vizsgálat 1:</u> Ha a $\Delta\Sigma_i \doteq \Delta\Sigma_i[t_i,\sigma_i, T_i,\sigma_i]$ szakasz minden szituációja különböző, akkor legyen

$$t' = t_i,\ T' = T_i,\ \sigma' = \sigma_i \text{ és}$$

$$\Sigma'[t',\sigma'] = \Sigma_i[t_i,\sigma_i],$$

$$\Delta\Sigma'[t',\sigma',T',\sigma'] = \Delta\Sigma_i[t_i,\sigma_i, T_i,\sigma_i].$$

Ha $\Delta\Sigma_i$-nek nem minden szituációja különböző, akkor konstruáljuk Σ_{i+1}-et a Redukció 1 eljárással.

<u>Redukció 1:</u> Legyen σ'_{i+1} az első szituáció $\Delta\Sigma_i$-ben, amely többször előfordul. σ_{i+1} lehet a σ_i is, ekkor első előfordulásának a t_i határpontot tekintjük, az utolsónak pedig a T_i határpontot. Ilyenkor σ_i legalább még egyszer fellép $\Delta\Sigma_i$ belsejében is. Legyenek a σ'_{i+1} szituáció fellépési pontjai $(t_i, T_i]$ -ben $t'_{i+1,j}$, $j=1,2,\ldots, n$. Ekkor $t_i \leq t'_{i+1,1} < \ldots < t'_{i+1,n} \leq T_i$.

A $\Delta\Sigma_i$ szakasz $\gamma(t_i,T_i] \geq \gamma_R$ P_A-kihasználtsága a $(t_i,T_i]$ részintervallumai P_A-kihasználtságainak sulyozott átlaga sulyozva a részintervallumok hosszával. Egy $(a,b]$ részintervallum $\gamma(a,b]$ P_A-kihasználása 0, ha a=b. A $(t'_{i+1,j},t'_{i+1,j+1}]$, $1 \leq j \leq n-1$, belső részintervallumok és a $(t_i,t'_{i+1,1}] \cup (t'_{i+1,n},T_i]$ intervallumpár P_A-kihasználása közül legalább egy nem lehet kisebb a $\gamma(t_i,T_i]$ értéknél /a sulyozott átlagnál/. Válasszunk egy ilyen tulajdonságu részintervallumot, vagy az intervallumpárat, ha az is ilyen tulajdonságu.

Ha a $[t'_{i+1,j},\ t'_{i+1,j+1}]$ $/1 \leq j \leq n-1/$ intervallumot választottuk, akkor legyen

$$t_{i+1}=t'_{i+1,1}\ ,\ T_{i+1}=t'_{i+1,1}+t'_{i+1,j+1}-t'_{i+1,j}\ ,\ \sigma_{i+1}=\sigma'_{i+1} \text{ és}$$

$$\Sigma_{i+1}[t_{i+1},\sigma_{i+1}]=\Sigma_i[t_i,\sigma_i]\oplus\Delta\Sigma_i[t_i,\sigma_i,t'_{i+1,1},\sigma'_{i+1}]\ ,$$

$$\Delta\Sigma_{i+1}[t_{i+1},\sigma_{i+1},T_{i+1},\sigma_{i+1}]=\Delta\Sigma_i[t'_{i+1,j},\sigma'_{i+1},t'_{i+1,j+1},\sigma'_{i+1}].$$

Ha $[t_i,t'_{i+1,1}] \cup [t'_{i+1,n},T_i]$ intervallumpárat választottuk, akkor legyen

$$t_{i+1}=t_i,\ T_{i+1}=t'_{i+1,1}+T_i-t'_{i+1,n},\ \sigma_{i+1}=\sigma_i \text{ és}$$

$$\Sigma_{i+1}[t_{i+1},\sigma_{i+1}]=\Sigma_i[t_i,\sigma_i]\ ,$$

$$\Delta\Sigma_{i+1}[t_{i+1},\sigma_{i+1},T_{i+1},\sigma_{i+1}]=\Delta\Sigma_i[t_i,\sigma_i,t_{i+1,1},\sigma'_{i+1}]\ \oplus$$

$$\oplus\,\Delta\Sigma_i[t'_{i+1,n},\sigma'_{i+1},T_i,\sigma_i]\ .$$

Mindkét esetben legyen

$$\Sigma_{i+1}=\Sigma_{i+1}[T_{i+1},\sigma_{i+1}]=\Sigma_{i+1}[t_{i+1},\sigma_{i+1}]\oplus\Delta\Sigma_{i+1}[t_{i+1},\sigma_{i+1},T_{i+1},\sigma_{i+1}]$$

<u>Vége</u> a Redukció 1-nek.

Mivel lényeges pontok végesben nem torlódhatnak, a $\Delta\Sigma$ szakasz véges sok lényeges pontot tartalmazhat. A Redukció 1 eljárásban a $\Delta\Sigma_{i+1}$ szakasz lényeges pontjainak száma mindig kisebb a $\Delta\Sigma_i$ szakasz lényeges pontjainak számánál. Ebből következik, hogy véges számu Redukció 1 után a Vizsgálat 1 a $\Delta\Sigma_i$ szakaszt biztosan következetesnek találja, mert a $\Delta\Sigma_i$ legfeljebb olyan szakasszá válhat, amelyben csak a határpontok lényeges pontok.

Az ilyen szakaszban azonban nem lehet ismétlődő szituáció.

Ezzel a (c) esetet visszavezettük a (b) esetre.

<u>(b) Eset:</u> Ha $t'=0$, akkor a $\Sigma_R[t', \sigma']$ szakasz a $\{\sigma\}_o$ szituációhalmaz részhalmaza, amely csak akkor lehet többelemü, ha abban $\sigma_o=0$ is előfordul σ' előtt. Ez azonban csak degenerált konfigurációnál volna lehetséges, amit kizártunk. $t'=0$ esetén tehát $R''(Q)=\Delta\Sigma_R[0, \sigma']$ maga következetes ütemterv.

Legyen tehát $t'>0$ /és lényeges pont!/. Ha $R(Q)$ maga következetes, akkor nincs mit bizonyitani. Ezt tehát zárjuk ki. A bizonyitás további menete a következő. $R(Q)$ ütemtervből először konstruálunk egy $R_o(Q)=\Sigma_o[t_o,\sigma] \oplus \Delta\Sigma_o[t_o,\sigma]$ ütemtervet, amelynek utolsó szakasza következetes, első szakaszának pedig nincs az utolsóval közös szituációja. Az $R_o(Q)$ tehát csak akkor nem következetes, ha a $\Sigma_o[t_o,\sigma]$ szakasza nem következetes, azaz a $\sigma_o = 0$, vagy valamelyik szituációja a szakaszon visszatér /legalábbis csak ekkor lehet nem következetes/. Ebben az esetben véges számú lépésben rendre megkonstruáljuk egy Σ_o, Σ_1, Σ_2, ... sorozat $\Sigma_i \doteq \Sigma_i[t_i,\sigma]$ tagjait mindaddig, amig következetessé nem válik.

Mivel a konstrukció redukálja Σ_i lényeges pontjának számát, ez véges lépésben bekövetkezik. Ezt a Vizsgálat 2 eljárásban ellenőrizzük és, ha nem következett be, megismételjük a Redukció 2 eljárást. Az eljárások a következők.

<u>Vizsgálat 2:</u> Ha

$$\Sigma_i=\Sigma_i[t_i,\sigma]$$

következetes, akkor legyen

$$R''(Q)=\Sigma''[t_i,\sigma] \oplus \Delta\Sigma''[t_i,\sigma]$$

ahol

$$\Sigma''[t_i,\sigma]=\Sigma_i[t,\sigma],$$
$$\Delta\Sigma''[t_i,\sigma]=\Delta\Sigma_o[t_o,\sigma].$$

Ha Σ_i nem következetes, alkalmazzuk a Redukció 2 eljárást Σ_{i+1} konstruálására.

Redukció 2: Legyen $T_{i+1}\in(0,t_i]$ a $\sigma_o=0$, vagy $\Sigma_i[t_i,\sigma]$ szakasz valamely szituációjának legnagyobb lényeges visszatérési pontja és legyen σ_{i+1} a T_{i+1} pontbeli utolsó visszatérő szituáció. Legyen $t'_{i+1}\in[0,T_{i+1})$ a σ_{i+1} első fellépési pontja. Hagyjuk el a $\Sigma_i[t_i,\sigma]$ szakaszból a $\Delta\Sigma_i[t'_{i+1},\sigma_{i+1},T_{i+1},\sigma_{i+1}]$ visszatérési szakaszt és legyen

$$t_{i+1}=t'_{i+1}+t_i-T_{i+1} \quad \text{és}$$

$$\Sigma_{i+1}[t_{i+1},\sigma]=\Sigma_i[t'_{i+1},\sigma_{i+1}]\oplus\Delta\Sigma_i[T_{i+1},\sigma_{i+1},t_i,\sigma]$$

Vége a Redukció 2-nek.

Megkonstruáljuk $R_o(Q)$ ütemtervet. Feltevésünk szerint $R(Q)$ nem következetes, ezért $\sigma_o=0$, vagy a $\Sigma[t',\sigma']$ valamely szituációja visszatérő és ott az ütemezési döntések különböznek. Ekkor biztosan vannak lényeges pontokban fellépő visszatérő szituációk is. Ezek száma azonban véges. Határozzuk meg minden ilyen szituációhoz a $\Delta\Sigma[t',\sigma']$ utolsó szakaszon az első fellépési helyet, vagy ha ott nem lép fel, akkor a $\Sigma[t',\sigma']$ szakaszon az utolsó fellépési helyet. Legyen e helyek maximuma T_o. Ha a $\Delta\Sigma[t',\sigma']$ periodikus akkor $T_o\leq T_R+p_R$, ahol T_R az előperiodus hossza, p_R a periodushossz.

Ettől függetlenül azonban T_o véges és definició szerint lényeges pont. Legyen σ a T_o pontbeli utolsó visszatérő szituáció. Legyen t, $0 \leq t \leq t'$ a σ első előfordulási helye. Hagyjuk ki R(Q)-ból a $\Delta\Sigma[t, \sigma, T_o, \sigma]$ visszatérési szakaszt és legyen

$$R_o(Q) = \Sigma_o[t,\sigma] \oplus \Delta\Sigma_o[t,\sigma]$$

a

$$\Sigma_o[t,\sigma] = \Sigma[t,\sigma] \quad \text{és}$$

$$\Delta\Sigma_o[t,\sigma] = \Delta\Sigma[T_o, \sigma]$$

csatolásával nyert új ütemterv. Ennek $\Delta\Sigma_o[t, \sigma]$ utolsó szakasza következetes /és periodikus, ha $\Delta\Sigma[t', \sigma']$ az volt/ és a $\Sigma_o[t, \sigma]$ szakasz egyetlen szituációja, és $\sigma_o = 0$ sem tér vissza az utolsó szakaszon.

Legyen $t_o = t$ és

$$\Sigma_o \doteq \Sigma_o[t_o, \sigma] = \Sigma_o[t, \sigma]$$

és alkalmazzuk a Vizsgálat 2-t i=0 mellett. Mindaddig, amig a Vizsgálat 2 a Redukció 2 eljárást és Σ_{i+1}-et eredményezi, ismételjük azt meg. Az ismétlések száma véges, mert Σ_i legalább eggyel kevesebb lényeges pontot tartalmaz, mint Σ_{i-1} és végül a lényeges pontok a határpontokra redukálódnak, kivéve, ha a Vizsgálat 2 már előbb nem találja a Σ_i szakaszt következetesnek.

Ezzel befejeztük tételünk /konstrukciós/ bizonyitását. Még azt kell megjegyezni, hogy a konstrukció az R(Q) ütemterv szakaszainak csatolásával történt, amelynek folyamán összefüggő ütemterv szakaszaiból nem konstruálható megszakitásos ütemterv. Ezért R"(Q) összefüggő lesz, ha R(Q) az volt.

Q. e. d.

A dominancia elv alkalmazásához bevezetünk egy fogalmat, a domináns döntés fogalmát, majd annak segitségével két domináns ütemezési stratégia-osztályt definiálunk.

Egy Σ állapotban az $s'(\Sigma)$ <u>döntés domináns</u> az $s(\Sigma)$ döntéssel szemben, ha az $s'(\Sigma)$ döntés megengedett és mellette a folyamatban lévő, vagy az éppen következő kiszolgálási ciklus egyike sem végződik későbben, mint $s(\Sigma)$ döntés esetén. Ha $f'(C_i)$ és $f(C_i)$, $i=1,2$, jelöli az $s'(\Sigma)$, illetve $s(\Sigma)$ melletti ciklusvégződéseket, akkor $f'(C_i) \leq f(C_i)$, $i=1,2$. Ha $f'(C_i)$ és $f(C_i)$ nem lennének meghatározottak $s'(\Sigma)$ illetve $s(\Sigma)$ által, akkor a lehetséges további meghatározó döntések melletti minimális értéket kell számitásba venni. Ha $f'(C_i) < f(C_i)$, de $f'(C_{3-i}) > f(C_{3-i})$, akkor $s(\Sigma)$ és $s'(\Sigma)$ egyike sem dominálja a másikat.

Egy Σ állapotban az $s'(\Sigma)$ <u>döntést gazdaságosnak</u> nevezzük, ha nincs olyan más döntés, amely dominálná.

Egy Σ állapotban az $s'(\Sigma)$ <u>döntést természetesnek</u> nevezzük, ha összefüggő és nincs más olyan összefüggő döntés, amely dominálná. Nyilvánvalóan nem minden természetes döntés gazdaságos és nem minden gazdaságos döntés természetes. A gazdaságos döntés lehet megszakitásos, vagy összefüggő is, a gazdaságos döntések együttesen bármely egyéb döntéseket dominálnak. A természetes döntések együttesen dominálnak bármely egyéb összefüggő döntést.

A dominancia, gazdaságosság és természetesség definiciója olyan, hogy az csak a $\sigma(\Sigma)$ utolsó szituációtól függ és nem függ a teljes Σ állapottól, feltéve hogy Σ mentén a döntések dominánsak. Fontos megjegyezni, hogy a <u>domináns</u> döntés mindig <u>megengedett</u>, ami azt jelenti, hogy az 1. és 2. Megállapodásokat és egyéb természetes feltételt

/pl. egy processzor egyszerre csak egy task-ot szolgálhat ki, stb./ nem sért. Igy egy döntés tulajdonképpen kvázidomináns, ha pl. a 2. Megállapodás miatt késleltet degenerált job-folyam ütemezést.

Nevezzük gazdaságosnak azt az $R'(Q)$ ütemtervet, amelyben minden Σ állapotban /azaz minden szituációban/ gazdaságos ütemezési döntés van. Nevezzük természetesnek azt az összefüggő ütemtervet, amelyben minden Σ állapotban /azaz minden szituációban/ természetes ütemezési döntés van.

3.2. Tétel: A természetes ütemtervek összefüggő-dominánsak, a gazdaságos ütemtervek pedig dominánsak.

Bizonyitás: Legyen $R(Q)$ egy tetszőleges megengedhető összefüggő ütemterv. Ha $R(Q)$-nak bármelyik Σ állapotában az $s(\Sigma)$ döntés nem természetes, helyettesitsük azt egy $s'(\Sigma)$ természetes döntéssel, amely azt dominálja. Ezzel $f(C_i)$ pontok legalább egyikét előbbre hozzuk. Az igy nyert új $R(Q)$ dominálja a régit, hiszen az ütemezési ciklusok előbbre hozása útján bármely $[0,t)$ intervallumon P_A igénybevétele növekszik, ilymódon a /3.1/ határérték nem csökkenhet. Ha $R(Q)$-nál $t=0$ ponttól indulva a döntéseket ténylegesen természetesekkel cseréljük fel, meg is konstruálhatjuk $R(Q)$ egy domináns $R'(Q)$ természetes ütemtervét. Teljesen analóg módon bizonyitható a gazdaságos ütemtervek dominanciája bármely $R(Q)$ megengedhető ütemtervvel szemben.

Q.e.d.

A gazdaságos és természetes ütemterveknek megfelelően analóg módon definiáljuk a gazdaságos és természetes ütemezés és stratégia fogalmát.

A természetes és gazdaságos ütemezések erősen szükitik a megengedhető ütemezések terét, amelyben az optimális ütemezést keresni kell. A következő lemma ezt bizonyitja.

<u>3.11. Lemma:</u> Egy <u>gazdaságos</u> ütemterv

(a) mindig szoros /kváziszoros/

(b) abban egyetlen megszakitott A-task sem szakithat meg másik A-task-ot

(c) az ütemtervet teljesen meghatározzák azokban a $\sigma[t]$ szituációkban hozott ütemezési döntések, amelyekben $\beta(t)=/\beta^{(1)}(t),\beta^{(2)}(t)/$ komponensei közül vagy mindkettő 0/ σ_0/, vagy az egyik 0, a másikra pedig a $\vartheta_i<\beta^{(i)}(t)<\tau_i$ reláció teljesül /σ_{3-i}/; ezek a kritikus szituációk; a döntés ekvivalens annak eldöntésével, hogy az adott pillanatban melyik job-folyamot ütemezzük a P_A processzorra; jelölje e döntéseket s_1 és s_2; ezek a kritikus döntések.

Egy <u>természetes</u> ütemtervet teljesen meghatároznak azokban a $\sigma[t]$ szituációkban hozott ütemezési döntések, amelyekben $\beta(t)$ komponensei közül vagy mindkettő 0/ σ_0/ , vagy az egyik 0, a másikra pedig $\beta^{(i)}(t)\leq\vartheta_i$ és $0<\beta^{(i)}(t)<\eta_{3-i}$ relációk teljesülnek / σ_{3-i}/; ezek a kritikus szituációk; ekkor a döntés a σ_0 szituációban annak eldöntésével ekvivalens, melyik job-folyamot ütemezzük először P_A-ra /s_1 és s_2 döntések/, a σ_{3-i} kritikus szituációban pedig annak eldöntésével, hogy a $Q^{(3-i)}$ job-folyamot ütemezzük-e azonnal P_A-ra /s_{3-i} döntés/, vagy hagyjuk a P_A processzort tétlenül a következő $f/C_i/$ pontig, ahol a $Q^{(i)}$ job-folyamot ütemezzük P_A-ra /s_0 döntés/; ezek a kritikus döntések.

A kritikus szituációk lényeges pontokban lépnek fel és ott - de csak ott - a job-folyamok késleltetik egymást.

Bizonyitás: A gazdaságos ütemtervekre egyszerre bizonyitjuk az (a), (b) és (c) állitásokat és (c)-vel együtt a természetes ütemtervekre vonatkozó állitást is úgy, hogy fokozatosan kizárunk nem domináns döntéseket.

Nyilvánvalóan nem lehet egy $\Sigma[t, \sigma]$ állapotban domináns olyan döntés, hogy a teljes P processzorhármas tétlen legyen valamely $t'>t$ pillanatig. Ebből az is következik, hogy minden gazdaságos és természetes ütemterv a $t=0$ pontban valamelyik A-task ütemezésével kezdődik.

Nem lehet domináns egy $f(A_i)$ pontban olyan döntés, amely szerint a megfelelő B_i-task nem azonnal ütemeződne, mert ez hátráltatná az $f(C_i)$ ciklusvégződést. Tehát gazdaságos és természetes ütemtervekben a B-taskok az A-task-okhoz csatlakozóan ütemeződnek. Ugyancsak nem lehet domináns B_i task megszaitása. Ebből következik, hogy kritikus szituáció csak $f(B_i)$ pontokban léphet fel, amig $\beta^{(i)}(t)=0$, $i=1$, vagy 2. Ilyenkor három eset lehetséges:

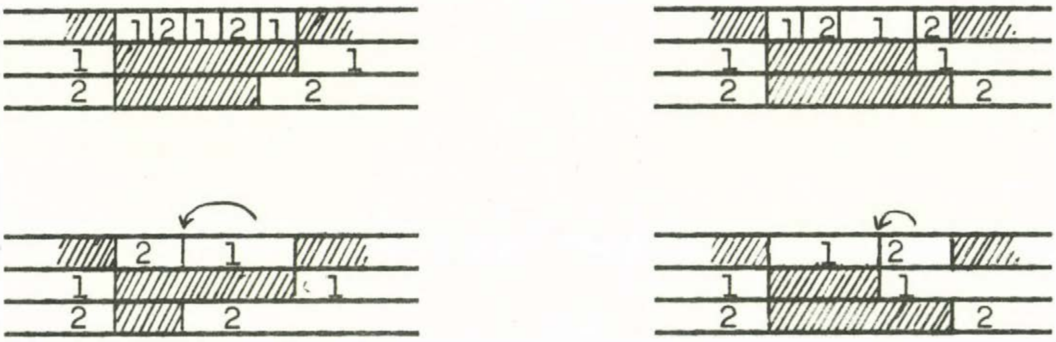
(α) egy B_{3-i}-task is ugyanabban a pillanatban fejeződött be

(β) egy B_{3-i}-task kiszolgálás alatt áll

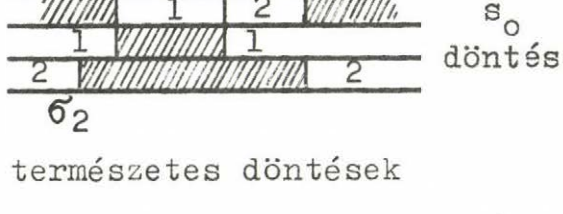
(γ) egy A_{3-i}-task áll kiszolgálás alatt

Az (α) esetben $\sigma=\sigma_0=0$ és egy A_1- és egy A_2-task egyszerre kész az ütemezésre. Két domináns döntés lehet: s_1 és s_2, hogy A_1-, vagy A_2-task-ot ütemezünk-e először.

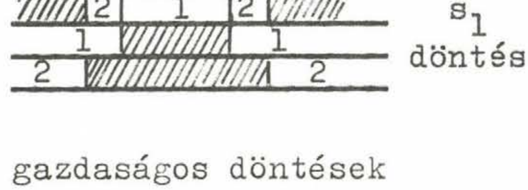
Mind gazdaságos, mind természetes ütemtervben csak összefüggő ütemezés lehet domináns, amint az alábbi illusztráció szemlélteti.



A (β) esetben, amikor $\beta^{(i)}(t)=0$, $0<\beta^{(3-i)}(t) \leq \vartheta_{3-i}$, mindkét ütemtervnél domináns döntés A_i azonnali ütemezése akkor, ha $\eta_i \leq \beta^{(3-i)}(t)$, így a szituáció nem kritikus. Ha azonban $\eta_i > \beta^{(3-i)}(t)$, akkor két domináns összefüggő ütemezési döntés lehetséges, tehát a szituáció a természetes ütemezésnél kritikus /σ_i/ . Ezt az alábbi illusztráció szemlélteti. Gazdaságos ütemezésnél az A_{3-i} ütemezése domináns és a szituáció nem kritikus. Ebből következik, hogy gazdaságos ütemterv feltétlenül szoros.

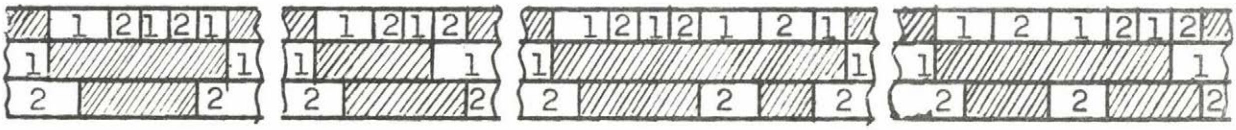


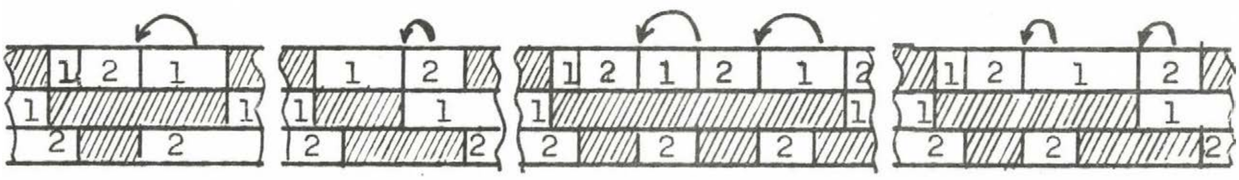
természetes döntések



gazdaságos döntések

A (γ) esetben, amikor $\beta^{(i)}(t)=0$, $\vartheta_{3-i}<\beta^{(3-i)}(t)<\tau_{3-i}$, a természetes ütemtervben, ahol megszakitás nem megengedett, a szituáció nem kritikus: a folyamatban lévő A_{3-i}-task kiszolgálása folytatódik. A gazdaságos ütemtervben két domináns döntés van: A_{3-i} folytatása befejezésig, vagy megszakitása A_i kiszolgálására /s_{3-i} ill. s_i döntés/. Hogy egyik sem dominálja a másikat, azt a fenti illusztráció mutatja. Az alábbi illusztrációk igazolják, hogy egy megszakitó task megszakitása, vagy egy megszakitott task általi megszakitás nem lehet gazdaságos /domináns/. Mindig csak az előbb





kezdődött A-task megszakitása lehet gazdaságos a később kezdődött által. A megszakitás azonban soha nem domináns a nem megszakitással szemben, mert bár a megszakitó task ciklusának befejezését előbbre hozza, a megszakitott task ciklusának befejezését viszont késlelteti.

A kritikus szituációkban a $\mathfrak{P}$ processzor-hármas állapota mindig változik, tehát azok lényeges pontokban lépnek fel. A kritikus döntések eredményezte késleltetés következik abból, hogy mindegyik döntésnél valamelyik job-folyam egy ciklusa később fejeződhet csak be, mint a másik kritikus döntésnél. Minden kritikus döntés meghatározza az először ütemezendő A-task-ot, amelynek kiszolgálása nem szakitható meg. Annak befejezése után viszont bármely domináns döntés egyértelmü, ami azt jelenti, hogy egyéb döntésnél egyik ciklusvégződés sem csökkenne, igy egyik ciklus sem lehet késleltetve.

Q. e. d.

A 3.11. Lemma alapján a gazdaságos és természetes ütemtervek jellegzetességeit a következőképpen foglalhatjuk össze:

A gazdaságos ütemtervek olyan kvázi szoros ütemtervek, amelyekben lehetnek megszakitások,de nincsenek felesleges kölcsönös megszakitások. Mindig létezik összefüggő gazdaságos ütemterv is, ami egyben természetes ütemterv. A gazdaságos ütemtervet meghatározzák az alábbi kritikus szituációkban hozott /kritikus/ döntések:

$$\sigma_0:\ \beta^{(1)}(t)=\beta^{(2)}(t)=0$$
$$\sigma_{1,1}:\ \beta^{(1)}(t)=0,\ \vartheta_2<\beta^{(2)}(t)<\tau_2$$
$$\sigma_{2,1}:\ \vartheta_1<\beta^{(1)}(t)<\tau_1,\ \beta^{(2)}(t)=0\ .$$

A σ_0 szituáció értéke csak 0 lehet, a $\sigma_{1,1}$ és $\sigma_{2,1}$ tipusú szituációk értéke azonban nem feltétlenül ugyanaz minden előforduláskor. A kritikus döntések s_1 és s_2. A σ_0 szituációban egyik sem, a $\sigma_{1,1}$-szituációban az s_1, a $\sigma_{2,1}$-szituációban az s_2 döntés megszakitást jelent.

A természetes ütemtervek összefüggőek, de nem feltétlenül szorosak. Mindig létezik szoros természetes ütemterv is, ami egyben gazdaságos ütemterv. A természetes ütemtervet meghatározzák az alábbi kritikus szituációkban hozott /kritikus/ döntések:

$$\sigma_0\ :\ \beta^{(1)}(t)=\beta^{(2)}(t)=0$$
$$\sigma_{1,0}\ :\ \beta^{(1)}(t)=0,\ \ 0<\beta^{(2)}(t)\leq\vartheta_2,\ 0<\beta^{(2)}(t)<\eta_1$$
$$\sigma_{2,0}\ :0<\beta^{(1)}(t)\leq\vartheta_1,\ 0<\beta^{(1)}(t)\leq\eta_2,\ \beta^{(2)}(t)=0.$$

A σ_0 szituáció értéke mindig 0, de a $\sigma_{1,0}$ és $\sigma_{2,0}$ tipusu szituációk értéke többféle lehet többszöri előforduláskor. A kritikus döntések a σ_0 szituációban

s_1 és s_2, a $\sigma_{i,o}$ szituációban pedig s_i és s_o.

Fontos megjegyezni azt, hogy mind a gazdaságos, mind a természetes ütemezésnél, ha egy kritikus szituációban nem a lemma szerinti kritikus döntést hozzuk, az ütemterv megszünik gazdaságos, illetve természetes ütemterv lenni és további szakaszára a lemma állitásai nem érvényesek.

A 3.2. Tétel és 3.11. Lemma következménye az alábbi

<u>3.3. Tétel:</u> A szoros /megszakitásos/ ütemtervek osztálya domináns.

<u>Bizonyitás:</u> Mivel a gazdaságos ütemtervek osztálya domináns és minden gazdaságos ütemterv szoros, a szoros ütemtervek tágabb osztálya szükségképpen domináns.

Q.e.d.

Nyitott kérdés egyelőre, hogy az összefüggő szoros ütemtervek osztálya domináns-e az összefüggő ütemtervekkel szemben.

3.4. Gazdaságos és természetes ütemtervek.

A gazdaságos és a természetes ütemtervek fontosságát a 3.2. Tétel szerinti domináns tulajdonsága jelenti. Ezek tulajdonságainak vizsgálata, a 3.11. Lemmán túl is, szükséges mert, bár szükebb osztályt alkotnak a megengedhető ütemtervek terében, mégis nem nyilvánvaló az optimális ütemtervek megkeresése.

A gazdaságos és a természetes ütemezés fogalma könynyen általánositható lenne kettőnél több szabályos job-folyamra és nem szabályos job-folyamokra. A kritikus szituációk létezése még nem determinisztikus ütemezési stratégiák és sztochasztikus job-folyamok esetén is egyszerüsitené az ütemezés problémáját.

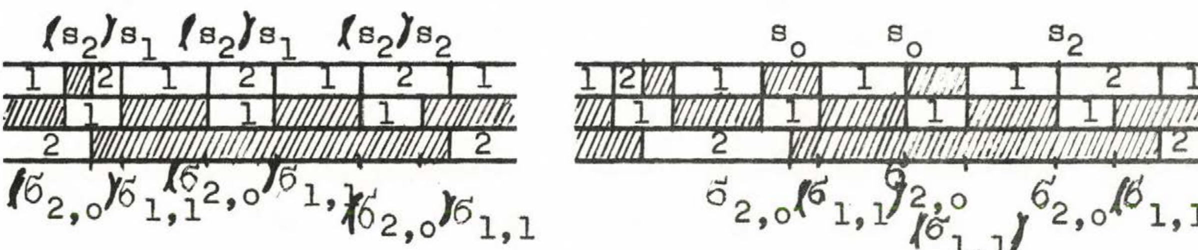
A gazdaságos és a természetes ütemtervek tulajdonságai sok vonatkozásban hasonlók, vagy analógiát mutatnak, ezért a két osztályt egy bizonyos határig célszerü együtt tárgyalni. Az irás röviditése érdekében célszerü bizonyos röviditéseket bevezetni.

Nevezzük <u>GT ütemtervnek</u> azt az R=R(Q) ütemtervet, amely <u>vagy</u> gazdaságos, <u>vagy</u> természetes. Használjuk a <u>G-ütemterv</u> elnevezést is egy gazdaságos ütemtervre és a <u>T-ütemterv</u> elnevezést is egy természetes ütemtervre. Nevezzük <u>G-kritikus szituációknak</u> a G-ütemtervek σ_0, $\sigma_{1,1}$, $\sigma_{2,1}$ tipusú szituációit és <u>T-kritikus szituációknak</u> a T-ütemtervek σ_0, $\sigma_{1,0}$, $\sigma_{2,0}$ tipusú szituációit. Ezeket együtt nevezzük <u>GT-kritikus szituációknak.</u> Egy GT ütemtervben annak tényleges tipusától függetlenül nemcsak a <u>saját kritikus szituációk</u>, amelyek tipusa saját, hanem a másik nem saját kritikus szituációk is felismerhetők, jóllehet nem pontosan a 3.11. Lemma szerinti jellemzői vannak.

<u>Nem kritikus</u> szituációja egy GT ütemtervnek egy σ_o állapot, ha ott a 2. Megállapodás miatt az ütemezés egyértelmüen meghatározott. E fontos tényt sokszor ki kell majd használnunk. Ettől eltekintve a σ_o-szituációk egyszerre saját kritikus szituációi mind a G- , mind a T-ütemterveknek.

A G-ütemtervekben minden $\sigma_{i,1}[t]$ saját kritikus szituáció előtt $\Delta t \doteq \min/\ \tau_{3-i} - \beta^{(3-i)}(t),\ \vartheta_i/$ idővel olyan szituáció található, amely egy T-ütemtervben $\sigma_{3-i,o}$ tipusú kritikus szituáció lenne. Most azonban a $t' = t - \Delta t$ pontban a $\beta^{(3-i)}(t') = 0$ feltétel nem okvetlen teljesül, amint ezt alább illusztráljuk.

A T-ütemtervekben minden $\sigma_{i,o}[t]$ kritikus szituáció után $\Delta t \doteq \beta^{(i)}(t)$ idővel olyan szituáció lép fel, amely egy G-ütemtervben $\sigma_{3-i,1}$ tipusú kritikus szituáció lenne. Most azonban a $t' = t + \Delta t$ pontban $\beta^{(i)}(t') = 0$ is lehetséges, amint ezt alábbi illusztrációnk mutatja.



G-ütemterv GT-kritikus szituációi

T-ütemterv GT-kritikus szituációi

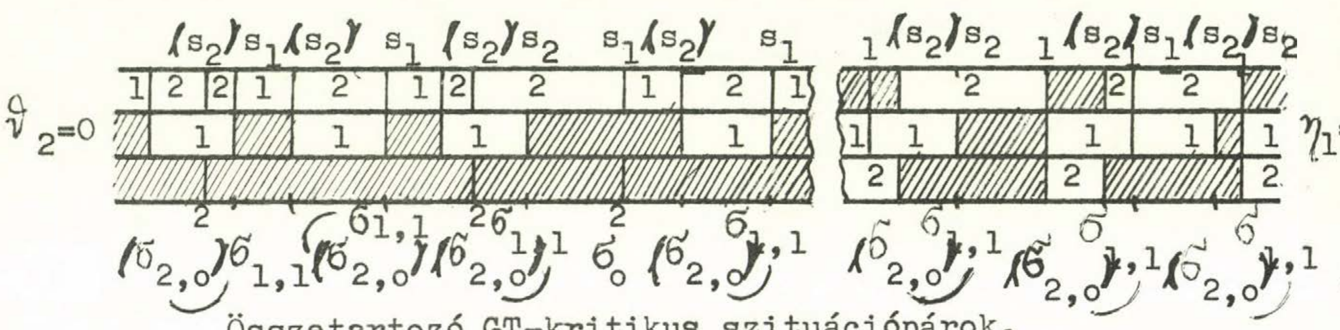
A GT-kritikus szituáció elnevezést terjesszük ki a nem saját, de mégis felismerhető szituációkra, amelyek a másik tipusú ütemtervnél lennének kritikus szituációk.

A GT-kritikus szituációk, mint látjuk, párban lépnek fel, amelyek σ_o esetén egybeesnek, egyébként

$$\sigma_{1,o} \quad \text{és} \quad \sigma_{2,1}$$

$$\sigma_{2,o} \quad \text{és} \quad \sigma_{1,1}$$

alkotnak párokat és a $\sigma_{i,o}$ mindig megelőzi a $\sigma_{3-i,o}$ tipusú GT-kritikus szituációt. $t=t(\sigma_{i,o})$ és $t'=t(\sigma_{3-i,1})$ esetén $t'-t \leq \min/\vartheta_i, \eta_{3-i}/$, amint ez a fenti illusztrációkon ellenőrizhető. A $\sigma_{i,o}$ és $\sigma_{3-i,1}$ GT-kritikus szituációpár egymásutáni lényeges pontban lép fel, amint erről szemlélet alapján könnyen meggyőződhetünk. /L. fenti és alábbi illusztrációkat/.



Összetartozó GT-kritikus szituációpárok.

A GT ütemtervek a /saját/ kritikus szituációkban hozott /kritikus/ döntésekkel egyértelmüen meghatározottak. Mégpedig minden nem-kritikus szituációban a /domináns/ döntés egyértelmüen meghatározott az utolsó kritikus döntés által. Igy többek között a nem saját GT-kritikus szituációkban is egyértelmüen meghatározott a döntés az utolsó kritikus döntés által. Nem GT-kritikus szituációkban viszont a döntések egy G- és egy T-ütemtervben is azonosak, ha kölcsönösen "elfogadható" /domináns/ döntés van a nem saját kritikus szituációkban is. Ezeket a tényeket precizebben kifejezi a következő 3.12. Lemma.

Korábbi definiciónkkal összhangban nevezzük egy GT ütemterv saját kritikus szituációi határolta szakaszait az ütemterv <u>határozott szakaszainak.</u> Ha van utolsó kritikus szituációja, akkor az utána kezdődő szakaszát szintén határozott szakasznak tekintjük.

/Utolsó határozott szakasz./ Egy G-ütemterv határozott szakaszát nevezzük G-szakasznak, egy T-ütemterv határozott szakaszát T-szakasznak, ha a megkülönböztetés szükséges. A határozott szakaszok tulajdonságait foglalja össze a következő lemma. Előrebocsájtjuk, hogy egy határozott szakasz hossza lehet 0 is, ilyenkor egyetlen pontbeli szituációsorozat alkotja.

3.12. Lemma: Egy tetszőleges $Q\in\mathcal{Q}$ konfiguráció mellett

/I/ Q bármely GT ütemtervénél

/1/ határozott szakaszokon az ütemezés következetes

/2/ a határozott szakaszt egyértelmüen meghatározza az alsó /kritikus/ határszituációjában hozott /kritikus/ döntés

/3/ minden pontbeli utolsó szituáció egyértelmüen meghatározza a határozott szakasz további részét; az alsó határpontbeli a teljes szakaszt

/4/ egy határozott szakasz csak akkor tartalmazhat egyenlő szituációkat, ha utolsó határozott szakasz /speciálisan a teljes ütemterv/; ilyenkor az periodikus

/5/ ha két határozott szakasznak van egyenlő szituációja, akkor egyik sem lehet az utolsó határozott szakasz

/II/ Q mind gazdaságos, mind természetes ütemterveinél

/6/ azonos kritikus szituációkban azonos kritikus döntések kongruens határozott szakaszt generálnak

/7/ ha két határozott szakasznak van egyenlő szituációja, akkor azok részben kongruensek; egyenlő első szituáció esetén kongruensek

/III/ Q bármilyen GT ütemterveinél

/8/ ha két határozott szakasznak van egyenlő szituációja, akkor az első ilyen pár lényeges pontokban van

/9/ ha két határozott szakasznak van egyenlő szituációja, akkor attól kezdve a két szakasz azonos mindaddig, amig valamelyik be nem fejeződik; ha bármelyik szakasz egy utolsó határozott szakasz, akkor a másik is az, és lényegében azonos GT ütemtervek utolsó szakaszai.

Bizonyitás: Ha Q a nulla konfiguráció, akkor csak az O_i, i=1,2, a GT ütemtervek, amelyekre az állitások triviálisak, vagy érdektelenek. Tegyük fel tehát, hogy $Q \neq O$. Az /1/-/9/ állitások /tulajdonságok/ bizonyitása rendre a következő.

/1/ következik abból, hogy nem-kritikus szitációkban a domináns döntés egyértelmüen meghatározott a szituáció által bármely GT ütemezésnél

/2/ következik a 3.11. Lemmából

/3/ következik abból, hogy bármely pontban az utolsó szituáció már a döntés eredménye, tehát azonossága a döntés azonosságát is jelenti

/4/ következik abból, hogy egy ütemterv lényeges pontjai nem torlódhatnak végesben, ha $Q \neq O$, és azonos szituációk vagy lényeges pontokban vannak, vagy legalább egy lényeges pont elválasztja azokat. Az /1/ tulajdonság folytán azonban ha egy σ szituáció egy határozott szakaszon egyszer visszatér, akkor végtelen sokszor vissza kell térnie. Ezért a szakasz végtelen hosszú és igy csak utolsó szakasz lehet. A következetesség miatt ez a szakasz ekkor periodikus is, amint azt a 3.7. és 3.9. Lemmákhoz hasonlóan egyszerüen beláthatjuk.

/5/ következik a /3/ tulajdonságból és abból a tényből, hogy egy GT ütemtervnek csak egy utolsó határozott szakasza lehet

/6/ következik a /2/ tulajdonságból

/7/ következik a /3/ tulajdonságból

/8/ következik abból, hogy az alsó határszituációk lényeges pontok és egyenlő szituációpár előtti lényeges pontokban mindig vannak egyenlő szituációk.

/9/ következik a /3/ tulajdonságból, valamint abból, hogy nem-GT-kritikus szituációban a gazdaságos és a természetes döntés azonos és a szituáció által egyértelmüen meghatározott. Emiatt ugyanis az egyenlő szituáció után addig a két szakasznak azonosnak kell lennie, amig valamelyikben egy kritikus döntés be nem következik. Ez azonban csak a határozott szakasz végén történhet meg. Ha az egyik szakasz utolsó határozott szakasz, akkor abban GT-kritikus szituáció az egyenlő szituáció után nem léphet fel. Ugyanis akkor a szomszédos lényeges pontban a másik minőségü GT-kritikus szituáció is fellépne és valamelyik saját lenne, ahol a szakasznak be kéne fejeződnie. Ekkor azonban a másik határozott szakasz sem fejeződhet be végesben, hisz az csak közös GT kritikus pontban volna lehetséges. Igy valóban mindketten utolsó határozott szakaszok, amelyek szükségképpen részben kongruensek. Ekkor azonban a két GT ütemterv, amelynek utolsó szakaszaik, véges kezdeti szakaszokon kivül megegyezik. Ez ekvivalens a lényegében azonosság definiciójával.

Q.e.d.

E lemma segitségével könnyü igazolni a következő tételt.

3.4. Tétel: Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy egy GT ütemterv következetes legyen az, hogy a kritikus szituációkban következetes legyen.

Elegendő, ha az azonos tipusú kritikus szituációkban a döntések azonosak a 2.Megállapodás figyelembevételével.

Bizonyitás: Definició szerint nyilvánvaló, hogy az ütemterv következetességéhez szükséges, hogy minden egyenlő kritikus szituációkban a kritikus döntések is azonosak legyenek a 2.Megállapodásnak megfelelő módositással. Ha egyenlő kritikus szituációkban ugyanazt a döntést hozzuk, akkor a szituációk után kezdődő határozott szakaszok első szituációi biztosan egyenlők lesznek. A 3.12. Lemma /7/ állitása szerint ekkor az ilyen határozott szakaszok kongruensek. A 3.12. Lemma /1/ állitása szerint viszont a határozott szakaszokon belül az ütemezés mindig következetes. Ha az azonos tipusú kritikus szituációkban azonos kritikus döntést hozunk, akkor ezzel az egyenlő szituációkban hozott döntések eleve egyenlőek, azaz következetesek. Az ütemterv tehát mindkét esetben következetes.

Q.e.d.

Könnyü látni, hogy a σ_0 szituációban valamelyik A-task összefüggő ütemezése a domináns döntés. Ez azt jelenti, hogy minden GT ütemterv összefüggő ütemezéssel kezdődik, vagyis a gazdaságos ütemtervek is összefüggőek legalább az első kritikus szituációig, de ha az σ_0, akkor még tovább. Hiszen minden ütemezés a $\sigma_0 = 0$ szituáció után kezdődik a t=0 pontban, igy a G-ütemtervek is. Ez azt jelenti, hogy az összes GT ütemterv első határozott szakasza mindössze négyféle lehet: kettő-kettőféle a G-, illetve T-ütemterveknél az $s(o)=s_1$ és s_2 döntésnek megfelelően.

Azonos $s(o)=s_1$ döntés mellett a 3.12. Lemma /9/ állitása szerint a G- és T-ütemtervek első határozott szakaszai megegyeznek az első T-kritikus pontig /ha ilyen van/ és csupán abban térnek el, hogy a G-szakasz tovább folytatódik a következő lényeges pontbeli G-kritikus szituációig /ha az nem σ_0, amikoris egybeesnek/. A T-szakasz kritikus szituációi a σ_0, $\sigma_{1,0}$ és $\sigma_{2,0}$ tipusok lehetnek és ennek megfelelően az azonos döntéssel kezdődő G-szakasz kritikus szituációja σ_0, $\sigma_{2,1}$, ill. $\sigma_{1,1}$ feltéve, hogy létezik kritikus szituációjuk. Látni fogjuk, hogy az első határozott szakaszok nem feltétlenül végesek. Az alábbiakban a GT ütemtervek első határozott szakaszainak tulajdonságait vizsgáljuk, amelyből fontos törvényszerüségeket tudunk majd levezetni a teljes ütemtervekre, elsősorban a természetes ütemezésekre.

Egy $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció megengedhető ütemterveinek halmazát $\mathfrak{R}(Q)$ jelöli. Legyen $\mathfrak{R}^{(GT)}(Q)$ a GT ütemtervek részhalmaza. Ezen belül legyen $\mathfrak{R}^{(G)}(Q)$ és $\mathfrak{R}^{(T)}(Q)$ a gazdaságos, illetve természetes ütemtervek halmaza. Az utóbbi kettő nem diszjunkt, mert minden konfigurációnak van olyan ütemterve, amely egyszerre gazdaságos és természetes /összefüggő és szoros/. $\mathfrak{R}^{(GT)}$, $\mathfrak{R}^{(G)}$ és $\mathfrak{R}^{(T)}$ halmazok mindegyike felbomlik azonban két-két diszjunkt részre, amelyeket az $s(o)=s_1$, illetve $s(o)=s_2$ kritikus döntéssel kezdődő ütemtervek alkotnak. A felbontások legyenek ennek megfelelően

$$\mathfrak{R}^{(GT)}=\mathfrak{R}^{(1)}\cup\mathfrak{R}^{(2)},\ \mathfrak{R}^{(G)}=\mathfrak{R}^{(G1)}\cup\mathfrak{R}^{(G2)},\ \mathfrak{R}^{(T)}=\mathfrak{R}^{(T1)}\cup\mathfrak{R}^{(T2)}.$$

A 3.12. Lemma következménye többek között az, hogy bármelyik GT ütemtervet egyértelmüen jellemez az egymás utáni kritikus szituációban hozott kritikus döntések sorozata. Az $\mathfrak{R}^{(Ta)}$, $a=1,2$, az összes lehetséges $\{s\}$ megszámlálható döntéssorozattal ekvivalens, amely $s(o)=s_a$ döntéssel kezdődik és minden további döntés egyik lehetséges kritikus döntés az előző kritikus döntés meghatározta T-kritikus szituációban.

Hasonlóan $\mathcal{R}^{(Ga)}$, a=1,2, ekvivalens azon $\{s\}$ döntéssorozatokkal, amelyek s_a-val kezdődnek és minden további döntés egyik lehetséges kritikus döntés az előző döntés meghatározta G-kritikus szituációban.

Vizsgáljuk annak feltételét, hogy egy GT ütemterv egy $t'\geq 0$ véges pontjában az első kritikus szituáció fellépjen. Lényegében elegendő az első T-kritikus szituáció helyét meghatározni. Megállapitásaink szerint ez csak az s(o) első kritikus döntéstől függ. Legyen tehát T'_a, a=1,2, az $\mathcal{R}^{(a)}(Q)$ halmazban az első T-kritikus szituáció helye és legyen σ'_a maga a szituáció. $T'_a \leq \infty$ pontig az ütemezés összefüggő és szoros /hiszen természetes és gazdaságos egyszerre/, ezért az $\mathcal{R}^{(a)}(Q)$ halmazban $\tau_1 \tau_2 > 0$ feltétel mellett

$$/3.6/ \quad f(C_{a,j}) = j\tau_a\,, \quad f(C_{3-a,j}) = \eta_a + j\tau_{3-a}\,, \quad j=o,1,2,\ldots$$

lesznek a ciklusvégződések a T'_a pont előtt. A kritikus szituáció is ciklusvégződésnél lép fel és arra is érvényes /3.6/. Mivel azok mindig párban lépnek fel és egyik a $Q^{(1)}$, a másik a $Q^{(2)}$ ciklusvégződése, jelölheti k_1 és k_2 a ciklusok sorszámát, amelyek végződésénél a GT-kritikus szituációk fellépnek. Tudjuk, hogy a két GT-kritikus szituáció távolsága a $\sigma_{i,o}$, $\sigma_{3-i,1}$ pár esetén

$$/3.7/ \quad |\Delta t_i| \leq \min/\eta_i, \vartheta_{3-i}/\,, \quad i=1,2.$$

A továbbiakban célszerü átmenetileg kizárni bizonyos konfigurációkat a vizsgálatból és a kizáró feltételeket később fokozatosan feloldani.

Tegyük fel egyelőre, hogy

$$/3.8/ \qquad 0 < \eta_i \leq \vartheta_{3-i}, \quad i=1,2,$$

feltétel teljesül. Ekkor a 3.11. Lemmában a $\sigma_{i,o}$ feltételeként szereplő $0 < \beta^{(3-i)}(t) < \eta_i$ relációból automatikusan következik a $0 < \beta^{(3-i)}(t) \leq \vartheta_{3-i}$ feltétel teljesülése. Mivel $\beta^{(i)}(t)=0$ mindig egy $t=f(C_i)$ ciklusvégződéssel ekvivalens, ezért a GT-kritikus szituációk feltételei a ciklusvégződések relativ viszonyával is kifejezhetők és sematikusan az alábbi módon irhatók:

σ_o: $\qquad f(C_1) = f(C_2)$

$\sigma_{1,o}$: $\qquad f(C_2) - \eta_1 < f(C_1) < f(C_2)$

$\sigma_{2,o}$: $\qquad f(C_1) - \eta_2 < f(C_2) < f(C_1)$

$\sigma_{1,1}$: $\qquad f(C_2) < f(C_1) < f(C_2) + \eta_2$

$\sigma_{2,1}$: $\qquad f(C_1) < f(C_2) < f(C_1) + \eta_1$

Az egyenlőtlenségekben mindig a középen álló ciklusvégződés adja a kritikus szituáció helyét, a másik ciklusvégződés pedig a GT-kritikus szituáció-párjának a helyét. A relációkból látható, hogy a $\sigma_{i,o}$ és $\sigma_{3-i,1}$ szituációtipusok feltétele ugyanaz, csupán a helyét reprezentáló ciklusvégződés cserélődik. Ez is igazolja a GT-kritikus szituációpárok létezését. A feltételek még az alábbi lemma szerint is felirhatók.

<u>3.13. Lemma:</u> A /3.8/ feltétel mellett akkor lép fel GT-kritikus szituáció, ha valamely $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$, $k_1+k_2 > 0$ egészekre

$$f(c_{2,k_2}) - \eta_1 < f(c_{1,k_1}) < f(c_{2,k_2}) + \eta_2 \tag{3.9}$$

reláció kialakul. A GT-kritikus szituáció tipusa

σ_o, ha $\quad f(c_{1,k_1}) = f(c_{2,k_2})$

$\sigma_{1,o}$ és $\sigma_{2,1}$, ha $\quad f(c_{1,k_1}) < f(c_{2,k_2})$

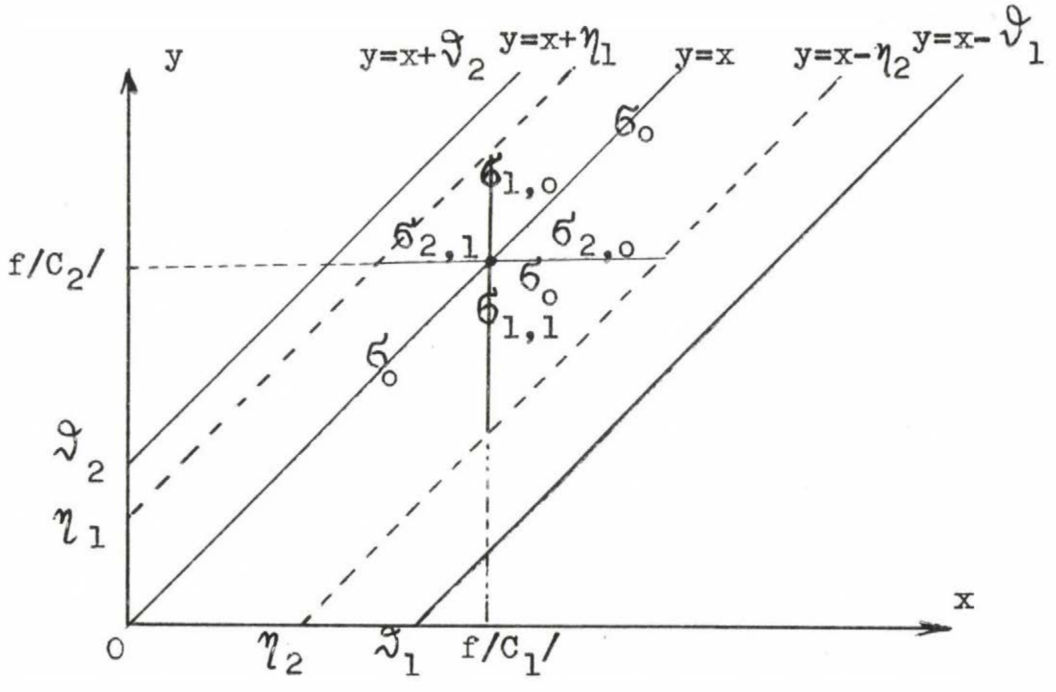
$\sigma_{2,o}$ és $\sigma_{1,1}$, ha $\quad f(c_{1,k_1}) > f(c_{2,k_2})$

Ha a /3.8/ nem teljesül, akkor $\eta_i=0$ esetén a /3.9/ megfelelő oldalán $<$ helyett $\leq$ jel irandó és $\eta_i > \vartheta_{3-i}$ esetén a /3.9/ megfelelő oldalán η_i helyett ϑ_{3-i}, $<$ helyett pedig $\leq$ jel irandó.

<u>Bizonyitás:</u> ha /3.8/ nem teljesül, akkor az állitást közvetlenül a 3.11. Lemma alapján láthatjuk be.

Q. e. d.

Az x-y koordináta-rendszerben $f(C_1)$-et az x, $f(C_2)$-t az y tengelyen ábrázolva, az egyes GT-kritikus szituációk tartományait sematikusan a 3.2. Ábra szerint szemléltethetjük.



3.2. Ábra: GT-kritikus szituációk tartományai.

Ez az ábra a /3.8/ feltétel mellett szemléltet. Ha azzal ellentétben valamelyik $\eta_i=0$, akkor az ábra $y=x$ és $y=x+\eta_1$, vagy $y=x-\eta_2$ egyenesei egybeesnek, a /3.9/ egyenlőtlenség megfelelő oldalán a $<$ jel helyett $\leq$ jelet kell alkalmazni és az egyenlőségnek a σ_0 szituáció felel meg. Ha viszont $\vartheta_2 < \eta_1$, vagy $\vartheta_1 < \eta_2$ viszony áll fenn, akkor az $y=x+\vartheta_2$ és $y=x+\eta_1$, vagy az $y=x-\eta_2$ és $y=x-\vartheta_1$ egyenesek helyzete megfordul és ismét az $y=x$ egyeneshez közelebbi egyenes fogja határolni a "kritikus sávot". Ekkor /3.8/-ban is el kell végezni a megfelelő szerepcserét és a $<$ jel helyett $\leq$ jelet kell irni.

Az ábrán feltüntetett szituációtipusok egyébként fix $f(C_1)$ mellett $f(C_2)$ függvényében, fix $f(C_2)$ mellett pedig $f(C_1)$ függvényében ábrázolják azt a ciklusvégződést, amely a kritikus szituációt eredményezi.

A 3.13. Lemma egy átfogalmazása az alábbi

3.13.' Lemma: Bármely $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció GT ütemterveinél az $f(C_1)$, $f(C_2)$ pontpárban GT-kritikus szituációpár lép fel, ha a

$$\Delta t_i \doteq f(C_i) - f(C_{3-i})$$

jelöléssel

$$/3.10/ \quad -\min/\eta_i, \vartheta_{3-i}/ \lessdot_i \Delta t_i \lessdot_{3-i} \min/\eta_{3-i}, \vartheta_i/, /i=1,2/$$

teljesül, ahol

$$\lessdot_i = \begin{cases} < \text{ ha } 0 < \eta_i \leq \vartheta_{3-i} \\ \leq \text{ egyébként.} \end{cases}$$

A GT-kritikus szituációk tipusa:

$$\begin{array}{llll} & \sigma_o & \text{ha} & \Delta t_i = 0 \\ \sigma_{i,o} & \text{és } \sigma_{3-i,1} & \text{ha} & \Delta t_i < 0 \\ \sigma_{3-i,o} & \text{és } \sigma_{i,1} & \text{ha} & \Delta t_i > 0 \end{array}$$

Bizonyitás: Kész

Q.e.d.

Ezen alapszik a következő lemma.

<u>3.14. Lemma:</u> Tetszőleges nem degenerált $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció <u>összes</u> $R \in \mathcal{R}^{(a)}(Q)$ /a=1 vagy 2/ <u>GT ütemtervénél egyszerre</u>, akkor és csak akkor létezik kritikus szituáció, ha az

$$/3.11/ \quad \eta_a - \min/\eta_a, \vartheta_{3-a}/ \preccurlyeq_a B_a \tau_a - A_a \tau_{3-a} \preccurlyeq_{3-a} \eta_a + \min/\eta_{3-a}, \vartheta_a/$$

egyenlőtlenségnek, ahol i=1,2 mellett

$$/3.12/ \quad \preccurlyeq_i = \begin{cases} < & \text{ha } 0 < \eta_i \le \vartheta_{3-i} \\ \le & \text{egyébként,} \end{cases}$$

létezik $\omega_a = /B_a, A_a/$ megoldása az

$$/3.13/ \quad \omega_a \geq /1,0/$$

feltétel mellett. Ebben az esetben a T-ütemtervek σ'_a első kritikus szituációjának a helye

$$/3.14/ \quad T'_a = \min/ B'_a \tau_a , \eta_a + A'_a \tau_{3-a}/ ,$$

ahol $\omega'_a = /B'_a, A'_a/$ a /3.11/ legkisebb megoldása a /3.13/ feltétel mellett. σ'_a egyben a G-ütemtervek első GT-kritikus szituációja. A G-ütemtervek σ''_a első saját kritikus szituációja azok

$$/3.15/ \quad T''_a = \max/ B'_a \tau_a , \eta_a + A'_a \tau_{3-a}/ = T'_a + |\Delta'_a - \eta_a|$$

pontjában lép fel, ahol

$$/3.16/ \quad \Delta'_a \doteq B'_a \tau_a - A'_a \tau_{3-a} .$$

A σ'_a és σ''_a szituációk tipusa és értéke a $\Delta'_a - \eta_a$ értéktől függ a következők szerint:

	σ'_a	σ''_a	$\beta(t)$ értéke	Feltétel
	σ_o	σ_o	$\beta^{(i)}(T'_a)=\beta^{(i)}(T''_a)=0,\ i=1,2$	$\Delta'_a-\eta_a=0$
/3.17/	$\sigma_{a,o}$	$\sigma_{3-a,1}$	$\beta^{(3-a)}(T'_a)=\tau_a-\beta^{(a)}(T''_a)=\lvert\Delta'_a-\eta_a\rvert$	$\Delta'_a-\eta_a<0$
	$\sigma_{3-a,o}$	$\sigma_{a,1}$	$\beta^{(a)}(T'_a)=\tau_{3-a}-\beta^{(3-a)}(T''_a)=\Delta'_a-\eta_a$	$\Delta'_a-\eta_a>0$

Ha a /3.11/-nek nincs a /3.13/ feltétel melletti megoldása, akkor $\mathcal{R}^{(a)}$ egyetlen R_{ao} ütemtervet tartalmaz, amely összefüggő, szoros és következetes.

<u>Bizonyitás:</u> A ciklusvégződések /3.6/ alatti formuláit a 3.13'. Lemma /3.1o/ egyenlőtlenségébe helyettesitve kapjuk a /3.11/ egyenlőtlenséget. A /3.14/ és /3.15/ értékek egyszerüen adódnak a kritikus szituációk definiciójából és a /3.17/ is könnyen belátható. Az utolsó állitás következik a 3.12. Lemma /1/ és /2/ állitásaiból.

Q.e.d.

<u>Megjegyzés:</u> A /3.11/ egyenlőtlenség legkisebb $\omega'_a \geq /1,0/$ megoldása egy tipikus koincidencia feladat megoldását jelenti, amelynek kérdéseivel az előző fejezetben foglalkoztunk.

A /3.6/ formulák érvényüket vesztik az első kritikus szituáció után, amikor valamelyik job-folyam biztosan késleltetést szenved. Ugyancsak érvénytelen a /3.6/ akkor, ha valamelyik job-folyam degenerált és a 2. Megállapodás miatt is késleltetés léphet fel. Ezért a degenerált esetet külön kell vizsgálni.

Vezessük be a σ_a^* jelölést az $\mathfrak{R}^{(a)}$ elemeinek első kritikus, vagy β-tipusú szituációjára, amely a $\sigma_o[o]$ kezdő szituáció és a $t_a'=\eta_a$ pontban esetlegesen fellépő nem-kritikus pontbeli β_a-szituáció után fellép. A fellépési pontját jelölje T_a^*. Nevezzük ezt a GT ütemterv <u>jellegzetes szituációjának.</u>

Vezessük be az R_{ao} jelölést arra az esetre, amikor $\mathfrak{R}^{(a)}$ elemeinek nincs kritikus szituációja és az $s(o)=s_a$ döntés az ütemtervet egyértelmüen meghatározza a 3.12. Lemma/1/és /2/ állításai szerint. $\tau_1\tau_2>0$ esetén a 3.14. Lemmával összhangban, /de $\tau_1\tau_2=0$ esetén is/ R_{ao} összefüggő, szoros és következetes ütemterv.

Nevezzük az ütemtervek $\mathfrak{R}_1$ és $\mathfrak{R}_2 \subset \mathfrak{R}$ <u>osztályait lényegében azonosaknak</u>, ha bármely $R\in\mathfrak{R}_1$ ütemtervhez van pontosan egy $R'\in\mathfrak{R}_2$ ütemterv úgy, hogy $R\approx R'$, azaz lényegében azonosak egymással. Legyen e tény jelölése $\mathfrak{R}_1\approx\mathfrak{R}_2$. Másként fogalmazva $\mathfrak{R}_1\approx\mathfrak{R}_2$ akkor, ha $\mathfrak{R}_1$ és $\mathfrak{R}_2$ között egy-egyértelmü megfeleltetés létesithető úgy, hogy a megfelelő elemek lényegében azonosak egymással.

A továbbiakban is a 3.14. Lemmához hasonlóan olyan tényeket fogunk igazolni nem degenerált konfigurációkra, amelyek degeneráltakra nem feltétlenül állnak fenn. Sokszor az elfajult eseteket is külön kell ellenőrizni. Ezt megkönnyiti, ha áttekintjük az <u>elfajult konfigurációk GT ütemterveinek</u> tulajdonságait.

A $Q = /\eta_1; \vartheta_1; \eta_2; \vartheta_2/$ konfiguráció négy paramétere közül legalább egy 0 értékü $2^4-1=15$-féleképpen lehetséges. Ezeket az eseteket a 3.3. Ábra szemlélteti és a 3.1. Táblázatban tekintjük át.

Eset	t_1'	T_1'	σ_1'	T_1^*	σ_1^*	$\mathcal{R}^{(1)}$	t_2'	T_2'	σ_2'	T_2^*	σ_2^*	$\mathcal{R}^{(2)}$	Megjegyzés
$\tau_1+\tau_2=0$	0	-	-	0	β_2	R_{1o}	0	-	-	0	β_1	R_{2o}	$R_{1o}\approx R_{2o}$
$\eta_1>0$	η_1	η_1	σ_o	-	-		0	η_1	σ_o	η_1	σ_o		$\mathcal{R}^{(1)}\approx\mathcal{R}^{(2)}$
$\vartheta_1>0$	0	-	-	-	-	R_{1o}	0	-	-	0	β_1	R_{2o}	$R_{1o}\approx R_{2o}$
$\eta_1\vartheta_1>0$	η_1	-	-	-	-	R_{1o}	0	-	-	η_1	β_1	R_{2o}	$R_{1o}\approx R_{2o}$
$\eta_1\eta_2>0$	η_1	η_1	σ_o	-	-		η_2	η_2	σ_o	-	-		
$\eta_1\vartheta_2>0$	η_1	η_1	σ_o	-	-		0	[1]	[1]	-	-		[1]
$\vartheta_1\vartheta_2>0$	0	[2]	[2]	-	-	$/R_{1o}/$	0	[2]	[2]	-	-	$/R_{2o}/$	[2] $/R_{1o}\approx R_{2o}/$
$\tau_1\eta_2>0$	η_1	[3]	[3]	-	-		η_2	η_2	σ_o	-	-		[3]
$\tau_1\vartheta_2>0$	η_1	[4]	[4]	[4]	[4]		0	[4]	[4]	[4]	[4]		[4]

<u>3.1. Táblázat:</u> Elfajult konfigurációk GT ütemterveinek jellemzői.

[1] σ_2' kritikus szituáció biztosan létezik és

$$\sigma_2' = \begin{cases} \sigma_o & \text{ha } \vartheta_2 \equiv 0 \ /\mathrm{mod}\ \eta_1/ \\ \sigma_{1,o} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

[2] $\mathfrak{R}^{(1)}$ és $\mathfrak{R}^{(2)}$ osztályban egyszerre van kritikus szituáció, ha a $k_1\tau_1 - k_2\tau_2 = 0$ egyenletnek van nem-triviális megoldása, azaz ϑ_1 és ϑ_2 racionálisan összefüggnek. Ekkor $\sigma_1' = \sigma_2' = \sigma_o$ és $T_1' = T_2' = k_1\tau_1 = k_2\tau_2$, ahol $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ relatív primek. Ellenkező esetben $\mathfrak{R}^{(1)}$ és $\mathfrak{R}^{(2)}$ elemeinek nincs kritikus szituációja és mindkét osztály egyetlen R_{ao} elem, amelyekre $R_{1o} \approx R_{2o}$.

[3] Kritikus szituáció biztosan létezik éspedig az első

$$\sigma_1' = \begin{cases} \sigma_o & \text{ha} \quad \vartheta_1 \equiv 0 \quad /\mathrm{mod}\ \eta_2/ \\ \sigma_{2,o} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

[4] Kritikus szituáció létezik $\mathfrak{R}^{(a)}$ elemeinél, ha a /3.11/-nek van /3.13/ melletti megoldása. $\mathfrak{R}^{(1)}$ és $\mathfrak{R}^{(2)}$ elemeinek egyszerre létezik kritikus szituációja és $\sigma_1' = \sigma_2'$, akkor ha a=1 vagy 2 mellett a

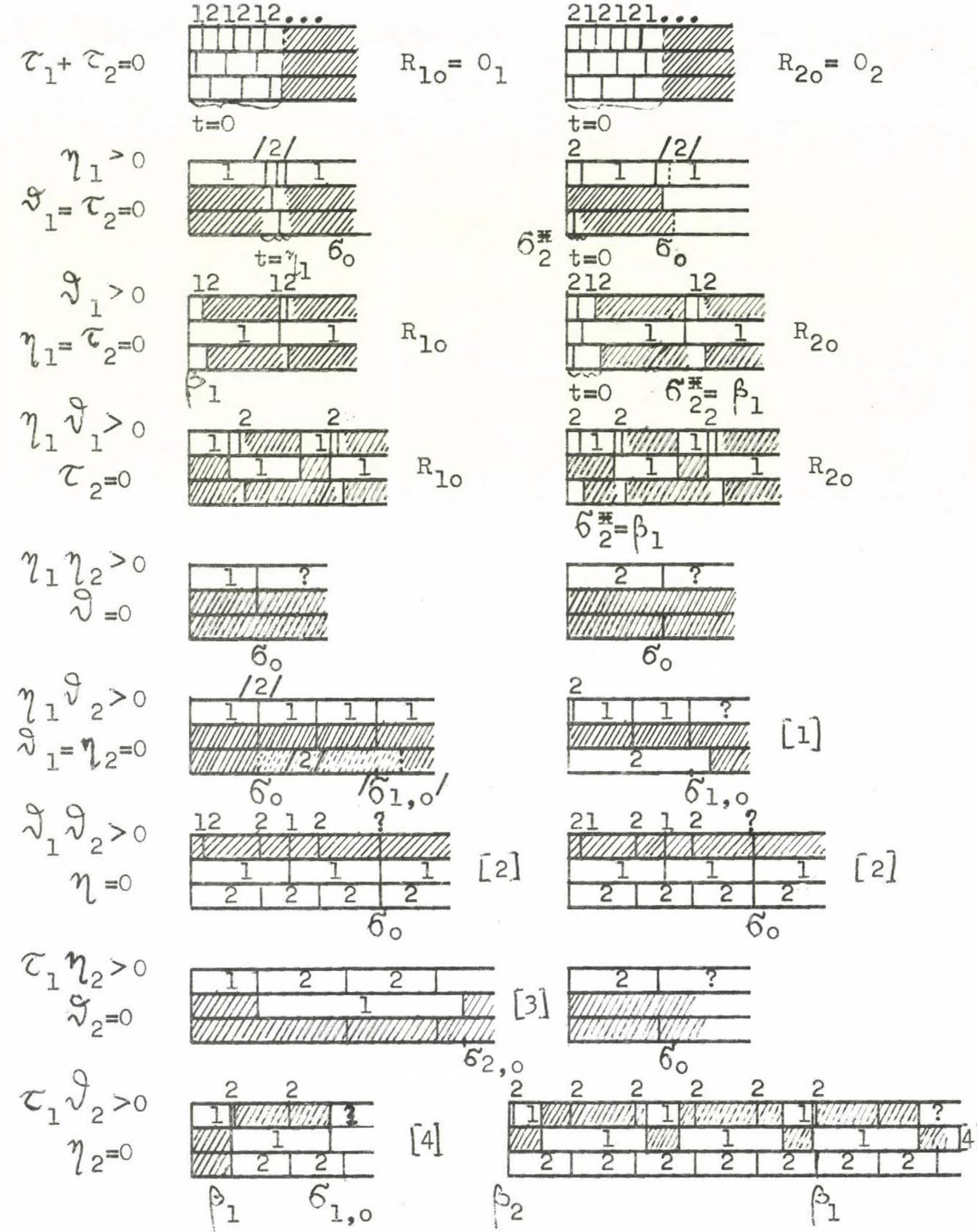
$$\Delta_a^* = B_a^* \tau_a - A_a^* \tau_{3-a} = \eta_1$$

egyenletnek van $\omega_a^* < \omega_a'$, $\omega_a^* \geq /1,o/$ megoldása.

Ekkor $\mathfrak{R}^{(a)}$ elemeinél a $T_a^* = B_a^* \tau_a$ pontban β_{3-a}-szituáció lép fel.

A 3.1. Táblázat első oszlopában a nem hivatkozott paraméterek értéke 0.

Az első négy sorban $\tau_1 \tau_2 = 0$, vagyis Q degenerált, az utolsó öt sorban azonban $\tau_1 \tau_2 > 0$, vagyis Q csak elfajult.



3.3. Ábra: Elfajult konfigurációk GT ütemtervei.

A továbbiakban részletesebben vizsgáljuk a GT-ütem-tervek tulajdonságait a /3.11/ egyenlőtlenség, valamint a

/3.18/ $\quad 0 \leq B_a \tau_a - A_a \tau_{3-a} \leq \eta$

és

/3.19/ $\quad 0 \leq B_a \tau_a - A_a \tau_{3-a} \leq_{3-a} \eta_a + \min/\eta_{3-a}, \vartheta_a/$

egyenlőtlenségek legkisebb $\omega_a \geq /1,0/$ feltétel melletti megoldásainak segitségével. A /3.18/ és /3.19/ két baloldali homogén koincidencia feladat /B/M/KIF/ , amelyekkel az előző fejezetben foglalkoztunk. A megoldás existenciáját a 2.1. Korollárium, a megoldást a 2.7. Tétel tisztázza. Eszerint a $0 \leq \Delta_a < 2\alpha$ megoldása mindig létezik, ha $\alpha > 0$, vagy τ_a és τ_{3-a} racionálisan összefüggők. Az $\alpha > 0$ esetben a megoldást a B/M/KIFM-Algoritmus, $\alpha = 0$ esetben pedig az R-Algoritmus szolgáltatja /ℓ.2.6. pont/.

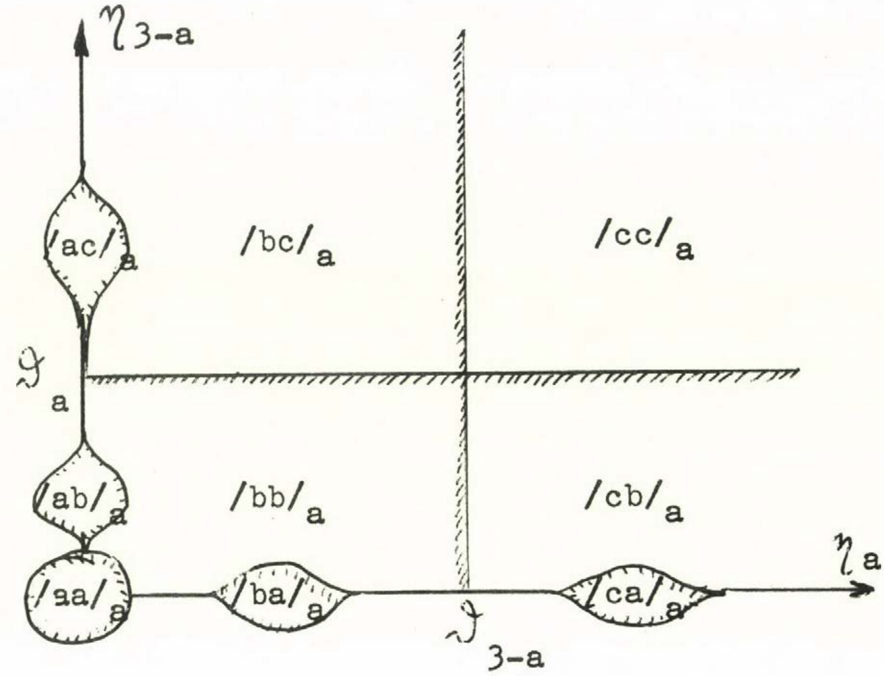
A vizsgálatok áttekintésének megkönnyitésére bontsuk a $\mathfrak{Q}$ paraméterteret részekre az alábbi feltételek szerint i=1 és 2 mellett:

/a/ $\quad \eta_i = 0$

/b/ $\quad 0 < \eta_i \leq \vartheta_{3-i}$

/c/ $\quad 0 \leq \vartheta_{3-i} < \eta_i$

Az η_a értékét az x-tengelyen, az η_{3-a} értékét az y-tengelyen ábrázolva, ϑ_a $\vartheta_{3-a} > 0$ esetén a $\mathfrak{Q}$ tartományait a 3.4. Ábra szemlélteti. Azon $/xy/_a$, x,y=a,b,c, jelzi az egyes tartományokat. Az ábrából látható, hogy $\vartheta_i = 0$ esetén a /b/ jelü tartományok eltünnek. Az egyes tartományokban a /3.11/ egyenlőtlenség speciális formáját a 3.2.Táblázat szerinti mátrixba foglaltuk.



3.4. Ábra: A $\mathcal{Q}$ résztartományai

	/3.11/	/a/	/b/	/c/
		$\eta_{3-a}=0$	$0<\eta_{3-a}\leq\vartheta_a$	$0\leq\vartheta_a<\eta_{3-a}$
/a/	$\eta_a=0$	$\Delta_a=0$	$0\leq\Delta_a<\eta_{3-a}$	$0\leq\Delta_a\leq\tau_a$
/b/	$0<\eta_a\leq\vartheta_{3-a}$	$0<\Delta_a\leq\eta_a$	$0<\Delta_a<\eta$	$0<\Delta_a\leq\tau_a$
/c/	$0\leq\vartheta_{3-a}<\eta_a$	$\eta_a-\vartheta_{3-a}\leq\Delta_a\leq\eta_a$	$\eta_a-\vartheta_{3-a}\leq\Delta_a<\eta$	$\eta_a-\vartheta_{3-a}\leq\Delta_a\leq\tau_a$

3.2. Táblázat: A / 3.11 / egyenlőtlenség speciális esetei.

<u>3.15. Lemma:</u> Ha a nem-degenerált $Q\in\mathfrak{Q}$ konfigurációnál valamely a=1 vagy 2 mellett a /3.18/ B/M/KIF legkisebb $\omega_a^* \geq /1,0/$ megoldására

$$\Delta_a^* = \eta, \tag{3.20}$$

és ez nem megoldása /3.11/-nek, akkor

$\mathfrak{R}^{(a)}$ elemeinek

$$T_a^* = B_a^* \tau_a = \eta + A_a^* \tau_{3-a}$$

pontjában a nevezetes szituációja

$$\sigma_a^* = \sigma_{3-a}[t'_{3-a}] = \begin{cases} \beta_{3-a} & \text{ha } 0 \leq \eta_a \leq \vartheta_{3-a}, \ \vartheta_{3-a} > 0 \\ \sigma'_{3-a} & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $\sigma_{3-a}[t'_{3-a}]$ az $\mathfrak{R}^{(3-a)}$ elemeinek $t'_{3-a}=\eta_{3-a}$ pontbeli szituációja;

$$\mathfrak{R}^{(1)} \approx \mathfrak{R}^{(2)};$$

az összes GT ütemtervnek egyszerre létezik, vagy nem létezik kritikus szituációja.

Ha létezik kritikus szituáció, akkor az első GT-kritikus szituáció minden ütemtervnél egyenlő és a /3.11/ és /3.18/ egyenlőtlenségek megoldásai között az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$B'_a = B_a^* + A'_{3-a}, \quad A'_a = A_a^* + B'_{3-a}$$

$$\omega'_a = \omega_a^* + \omega'_{3-a} \tag{3.21}$$

$$\Delta'_a = \Delta_a^* - \Delta'_{3-a}, \quad T'_a = T_a^* + T'_{3-a} - \eta_{3-a},$$

ahol

$$\bar{\omega}'_{3-a} = /A'_{3-a}, \ B'_{3-a}/ .$$

Ha nem létezik kritikus szituáció, akkor $\mathfrak{R}^{(i)}$ egyetlen R_{io} elem és $R_{1o} \approx R_{2o}$.

<u>Bizonyitás:</u> $\eta_a - \min/\eta_a, \vartheta_{3-a}/ \geq 0$ és $\eta_a + \min/\eta_{3-a}, \vartheta_a/ \leq \eta$ következtében a /3.11/ minden /3.13/ feltétel melletti megoldása kielégiti a /3.18/-at is. Ezért a /3.18/ egyenlőtlenség legkisebb $\omega_a^* \geq /1,o/$ megoldására $\omega_a^* < \omega_a'$, ha ω_a' a /3.11/ legkisebb $\omega_a' \geq /1,o/$ megoldása. $\tau_1 \tau_2 > 0$ következtében $T_a^* \leq T_a'$ pontig a /3.6/ biztosan igaz. Ezért a /3.2o/ ekvivalens egy

/3.22/ $$C_a = f\,(C_{3-a}) + \eta_{3-a}$$

egyenlőséggel valamely C_a és C_{3-a} ciklusokra.

Ha $\tau_a < \eta$, azaz $\tilde{\vartheta}_a < \eta_{3-a}$, akkor a /3.11/ alakját a 3.2. Táblázat /xc/ oszlopában találjuk és annak legkisebb /3.13/ melletti megoldása $\omega_a' = /1,o/$. Erre azonban

$$0 < \Delta_a' = \tau_a < \eta ,$$

ezért a /3.2o/ egyetlen $\omega_a^* \geq /1,o/$ számpárra sem teljesülhet.

Ha $\tau_a \geq \eta$, azaz $\eta_{3-a} \leq \tilde{\vartheta}_a$, akkor a /3.22/ ekvivalens azzal, hogy a $T_a^* = f\,(C_a)$ pontban a β_{3-a}-szituáció vagy egy T-kritikus szituáció lép fel. Azonban ugyanez a szituáció lép fel minden $R' \in \mathfrak{R}^{(3-a)}$ ütemterv $t_{3-a}' = \eta_{3-a}$ pontjában is. A 3.12. Lemma /9/ állítása szerint ekkor az $\mathfrak{R}^{(a)}$ elemei a T_a^* ponttól az első GT-kritikus szituációig ugyanolyanok, mint $\mathfrak{R}^{(3-a)}$ elemei a t_{3-a}' ponttól az első GT-kritikus szituációig, ha ilyen szituáció létezik. Ez egyszerre igaz.

A GT-kritikus szituációk azonosak és $T'_a - T^*_a = T'_{3-a} - t'_{3-a} \geq 0$ az összes GT ütemtervnél. Ha ilyen szituáció nem létezik, akkor az összes GT ütemterv lényegében azonos, márpedig T^*_a ill. t'_{3-a}-től $\mathfrak{R}^{(a)}$ ill. $\mathfrak{R}^{(3-a)}$ elemei is azonosak. Ebből következik, hogy $s(o)=s_a$, $a=1,2$, egyetlen R_{ao} ütemtervet határoz meg. $R_{1o} \approx R_{2o}$ a fentiekből nyilvánvaló. Ha létezik kritikus szituáció, akkor viszont $\mathfrak{R}^{(a)}$ és $\mathfrak{R}^{(3-a)}$ tartalmazzák az összes lehetséges $\{S\}_{s(o)=s_a}$ kritikus döntéssorozatok szerinti ütemterveket, amelyek a két halmaznál azonosak. Ez következik abból, hogy az első kritikus szituációk mindkét halmazban azonosak és igy a 3.12. Lemma szerint a további határozott szakaszok záró kritikus szituációikkal rendre meghatározottak ugyanazon kritikus döntésekkel. Ezért valóban $\mathfrak{R}^{(1)} \approx \mathfrak{R}^{(2)}$. A $\sigma'_a = \sigma'_{3-a}$ következtében /3.17/-ből $\Delta'_a - \eta_a = -(\Delta'_{3-a} - \eta_{3-a})$, amiből $\Delta^*_a = \eta_a + \eta_{3-a}$ folytán $\Delta'_a = \Delta^*_a - \Delta'_{3-a}$ következik. Az ω-ra és a /B,A/-ra vonatkozó összefüggések ebből már következnek.

Q.e.d.

1. Megjegyzés: A 3.15. Lemma feltétele nem teljesülhet, ha a /3.11/ és /3.18/ egyenlőtlenségek azonosak, vagy legalábbis a jobboldalaik azok. A 3.2. Táblázat szerint igy az $/xa/_a$ esetek kizárhatók. Az $/xc/_a$ esetekben viszont az $\omega'_a = /1,o/$ mindig a /3.11/ megoldása, amelyre $\Delta'_a = \tau_a < \eta$, ezért a 3.15. Lemma feltétele nem teljesülhet. A 3.15. Lemma feltétele azonban teljesül, ha /3.2o/-nak van megoldása az $/xb/_a$ esetekben, amikor

$$0 < \eta_{3-a} \leq \vartheta_a .$$

A lemma szimmetriája miatt ez ekvivalens a

$$0 < \eta_1 \leq \vartheta_2 \quad \text{vagy} \quad 0 < \eta_2 \leq \vartheta_1$$

feltétellel.

2. Megjegyzés: A /3.21/ összefüggések következtében, ha a 3.15. Lemma feltétele teljesül $/xy/_a$ esetben, akkor a $/3.11/_a$ helyett megoldhatjuk a $/3.11/_{3-a}$ egyenlőtlenséget is, amelynél azonban az $/yx/_{3-a}$ lesz a megfelelő eset.
Igy tehát a

$$0 \leq \Delta_1 < \eta_2 \text{ és } 0 < \Delta_2 \leq \eta_1 \text{, valamint az}$$
$$\eta_1 - \vartheta_2 \leq \Delta_1 < \eta_1 + \eta_2 \text{ és } 0 < \Delta_2 \leq \tau_2$$

egyenlőtlenségek megoldása egyszerre létezik és köztük a /3.21/ összefüggések érvényesek.

3. Megjegyzés: A $/bc/_{3-a}$ esetben speciálisan a $/3.11/_{3-a}$ megoldása $\omega'_{3-a}=/1,o/$, amit /3.21/-ben figyelembevéve

$$\omega'_a=/B^*_a \;, \; A^*_a+1/$$

lesz a $/3.11/_a$ megoldása, ha a ω^*_a eleget tesz a 3.15. Lemma feltételeinek, tehát

$$B^*_a \;\tau_a - A^*_a \;\tau_{3-a} = \eta_a + \eta_{3-a}.$$

A $/bc/_{3-a} = /cb/_a$ esetben azonban teljesül

$$\tau_{3-a} < \eta \leq \tau_a$$

reláció, ezért a /3.2o/ egyenlet legkisebb megoldása csak

$$\omega^*_a = /1, \left[\frac{\vartheta_a}{\tau_{3-a}}\right]/$$

lehet, amiből

$$\omega'_a = /1, \left[\frac{\vartheta_a}{\tau_{3-a}}\right]+1/$$

megoldás adódik. /3.2o/ megoldásának feltétele ebben az esetben nyilvánvalóan a

$$\vartheta_a \equiv \eta_{3-a} \quad /\mathrm{mod}\ \tau_{3-a}/$$

teljesülése.

4. Megjegyzés: A /3.2o/ bekövetkezhet egyszerre a=1 és 2 mellett is. Ilyenkor azonban a 3.12. Lemma /4/ állítása alapján belátható, hogy $\mathfrak{R}^{(1)}$ és $\mathfrak{R}^{(2)}$ mindegyike egyetlen, kritikus szituációt nem tartalmazó, R_{ao} periodikus ütemtervből áll. Ilyen tulajdonságú például a Q=/1;5;1;3/ konfiguráció.

3.16. Lemma: Ha bármely nem-elfajult $Q \in \mathfrak{Q}$ konfigurációnál valamelyik i=1 vagy 2 mellett

$$/3.23/ \qquad 0 \leq \vartheta_{3-i} < \eta_i$$

fennáll, akkor a /3.11/ egyenlőtlenség /3.13/ feltétel melletti megoldása a=1,2 mellett egyaránt létezik és a megfelelő /3.19/ B/M/KIF megoldása szolgáltatja $/\omega''_a/$.

Bizonyitás: Ha $0 \leq \vartheta_a < \eta_{3-a}$, akkor a /3.11/ egyenlőtlenségnek a kivánt megoldása ω'_a=/1,o/ mindig létezik, amint ez a 3.2. Táblázat $/xc/_a$ utolsó oszlopából látható. Ez egyben a /3.19/ megoldása is.

Ha $0 \leq \vartheta_{3-a} < \eta_a$, akkor /3.11/ alakját a 3.2. Táblázat $/cy/_a$ utolsó sorában találjuk, de a $/cc/_a$ esetben ismét ω'_a=/1,o/= ω''_a. A $/ca/_a$ és $/cb/_a$ esetekben még $0 \leq \eta_{3-a} \leq \hat{\vartheta}_a$ is teljesül. Ekkor /3.11/ alakja

$$/3.11'/ \qquad \eta_a - \vartheta_{3-a} \leq \Delta_a <_{3-a} \eta$$

és /3.19/ alakja

$$/3.19'/ \qquad 0 \preccurlyeq \Delta_a \prec_{3-a} \eta .$$

$\eta_a > 0$ következtében a 2.1. Korollárium szerint ennek mindig létezik pozitiv megoldása. Belátjuk, hogy legkisebb $\omega''_a \geq /1,o/$ megoldására nem lehet

$$/*/ \qquad 0 \doteq \Delta''_a < \eta_a - \vartheta_{3-a} .$$

Ebből következik, hogy /3.11'/ és /3.19'/ legkisebb megoldása mindig létezik és azonos. Ehhez elegendő megmutatni, hogy bármely a /*/-nak eleget tevő $\omega''_a \geq /1,o/$ megoldáshoz létezik $\omega_a < \omega''_a$, amely kielégiti /3.11'/ egyenlőtlenséget és $\omega_a \geq /1,o/$.

Definiáljuk a

$$K = f_{\geq}\left(\frac{\eta_a - \Delta''_a}{\tau_{3-a}}\right) \qquad \text{és} \qquad A^*_a = A''_a - K$$

egészeket. A $B''_a \tau_a - A''_a \tau_{3-a} \doteq \Delta''_a$ definicióból /*/ miatt $A''_a \tau_{3-a} = B''_a \tau_a - \Delta''_a \geq \tau_a - \Delta''_a > \vartheta_{3-a} \geq 0$, ezért

$$A''_a \geq \frac{\eta_a - \Delta''_a}{\tau_{3-a}} > 0, \text{ vagyis } \quad A''_a \geq K > 0.$$

Igy

$$0 \leq A^*_a < A''_a .$$

Legyen $\omega^*_a = /B''_a \ , A^*_a/$. Ekkor $\Delta^*_a = \Delta''_a + K\tau_{3-a}$.

$z \leq f_{\geq}(z) < z + 1$ felhasználásával K-nál,

$$\eta_a - \vartheta_{3-a} \leq \Delta^*_a < \eta_a + \tau_{3-a}$$

relációt nyerjük. Itt vagy

$$\eta_a - \vartheta_{3-a} \leq \Delta^*_a \prec_{3-a} \eta$$

amikoris $\omega_a^{*} < \omega_a''$ megoldása /3.11'/-nek, vagy

$$\eta \preccurlyeq'_{3-a} \Delta_a^{*} < \eta_a + \tau_{3-a}.$$

Ez utóbbi esetben

$$\eta \preccurlyeq'_{3-a} \Delta_a'' + K\tau_{3-a}$$

relációból /*/ felhasználásával

$$K \geq \frac{\eta - \Delta_a''}{\tau_{3-a}} = \frac{\eta_a - \Delta_a''}{\tau_{3-a}} + \frac{\eta_{3-a}}{\tau_{3-a}} > \frac{\vartheta_{3-a}}{\tau_{3-a}} + \frac{\eta_{3-a}}{\tau_{3-a}} = 1 ,$$

vagyis $K \geq 2$ adódik. Legyen $\omega_a = /B_a'', A_a'' - K+1/ < \omega_a''$.
ω_a-ra $\Delta_a = \Delta_a^{*} - \tau_{3-a}$, ezért a fentiekből

$$\eta - \tau_{3-a} \preccurlyeq'_{3-a} \Delta_a < \eta_a$$

adódik, amiből $\eta - \tau_{3-a} = \eta_a - \vartheta_{3-a}$ és $\eta_a \leq \eta$ miatt bármely $\preccurlyeq_{3-a}$ érték mellett következik

$$\eta_a - \vartheta_{3-a} \leq \Delta_a \preccurlyeq_{3-a} \eta.$$

Vagyis $\omega_a < \omega_a''$ megoldása /3.11'/-nek.

Q.e.d.

3.17. Lemma: Ha a nem-degenerált $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációnál valamelyik a=1 vagy 2 mellett a /3.11/-nek nincs megoldása, de a /3.19/ megoldása létezik és arra

/3.24/ $$\Delta_a'' = 0,$$

akkor R_{ao} periodikus

/3.25/ $$p_a = B_a'' \tau_a = A_a'' \tau_{3-a}$$

periodushosszal.

/3.26/ $$\sigma_a^* = \beta_a \ , \quad T_a^* = \eta_a + p_a \ ,$$

és az $\eta_a + kp_a$, $k=0,1,\ldots$ pontokban a β_a-szituáció periodikusan fellép. A lemma feltétele csak

/3.27/ $$0 < \eta_a \le \vartheta_{3-a} \ , \quad 0 \le \eta_{3-a} \le \vartheta_a$$

mellett teljesülhet.

Bizonyitás: A lemma feltétele csak akkor teljesülhet, ha /3.11/ és /3.19/ nem ugyanaz, ezért a 3.2. Táblázat szerinti $/ay/_a$ sor eleve kiesik a lehetőségek közül. A feltétel akkor sem teljesül, ha a /3.11/-nek van megoldása. A 3.16. Lemma következményeként a 3.2. Táblázat $/cy/_a$ sora is kiesik. Kiesik továbbá a $/bc/_a$ eset is, amikor $\omega_a' = /1,0/$ a /3.11/ megoldása. Elegendő tehát a $/ba/_a$ és $/bb/_a$ esetekkel foglalkozni. Ekkor éppen a /3.27/ feltételek állnak fenn.

A lemma feltevése mellett a 3.14. Lemma szerint $\mathfrak{R}^{(a)}$ valóban egyetlen R_{ao} összefüggő, szoros és következetes ütemterv. Ekkor /3.6/ érvényes és a /3.24/ azt jelenti, hogy valamely C_a és C_{3-a} ciklusokra

$$f(C_a) = f(C_{3-a}) - \eta_a$$

teljesül, vagyis az

$$f(C_{3-a}) = A_a'' \tau_{3-a} + \eta$$

pontban egy A_a-task végződik és egy A_{3-a}-task indul és ezért ebben a pontban éppen egy β_a-szituáció alakul ki. /3.27/ miatt az A_{3-a}-task biztosan ütemeződik, de ugyanez a szituáció lép fel a $t_a' = \eta_a$ pontban is.

Igy a β_a-szituáció visszatérő és a 3.8. Lemma szerint R_{ao} periodikus. A periodushossz a β_a-szituáció első visszatérési ideje, vagyis /3.25/. A /3.26/ ebből már következik.

Q.e.d.

Megjegyzés: A/3.24/ és/3.25/ ekvivalens azzal, hogy a τ_a és τ_{3-a} racionálisan összefüggők. Racionálisan független τ_1 és τ_2 mellett ugyanis a /3.27/ miatt mindig van /3.19/-nek olyan ω_a megoldása, amelyre $\Delta_a > 0$, igy ω_a megoldása /3.11/-nek is. Hiszen ekkor $\eta_a + \min/\eta_{3-a}, \vartheta_a/ > 0$ és a 2.2.Tétel a megoldást garantálja.

A 3.14-3.17. Lemmák a GT ütemtervek tulajdonságainak feltételeit tartalmazzák a /3.11/ , /3.18/ és /3.19/ egyenlőtlenségek megoldásai segitségével. A feltételek nem közvetlenül a Q konfiguráció paramétereire vonatkoznak /közvetve természetesen igen/. A következő lemma részben pótolja ezt a hiányt. További közvetlen kapcsolatokat is kimutathatnánk, azonban nem lesz rá szükségünk.

3.18. Lemma: Egy $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció $R \in \mathcal{R}^{(a)}$ GT ütemtervének akkor és csak akkor nincs kritikus szituációja, ha

/i/ $\eta=0$, $\vartheta_1 \vartheta_2 > 0$ és ϑ_1, ϑ_2 racionálisan függetlenek

/ii/ $\tau_1 = \tau_2 = 0$

/iii/ $\tau_i = 0$, $\vartheta_{3-i} > 0$, i=1 vagy 2

/iv/ $\eta_a > 0$, $\tau_1 \tau_2 > 0$, τ_1, τ_2 racionálisan összefüggők és

$$\eta \leqslant'_{3-a} q, \tag{3.28}$$

ahol $\dfrac{\tau_1}{\tau_2} = \dfrac{k_1}{k_2}$, $k_1 > 0, k_2 > 0$ relativ primek,

$$q = \frac{\tau_1}{k_1} = \frac{\tau_2}{k_2}, \tag{3.29}$$

$$\leqslant'_{3-a} = \begin{cases} < & \text{ha } \eta_{3-a} = 0 \\ \leq & \text{ha } \eta_{3-a} > 0. \end{cases}$$

Ha még $\eta_{3-a} > 0$ is teljesül, akkor

$$\mathcal{R}^{(GT)} = \{R_{1o}, R_{2o}\}. \tag{3.30}$$

Bizonyitás: Az /i/-/iv/ feltételek szükségességét és elegendőségét egyszerre bizonyitjuk.

Az $\eta=0$, $\vartheta_1 \vartheta_2 > 0$ eset a 3.2. Táblázat /aa/$_a$ esetének felel meg, amikor a /3.11/ alakja $\Delta_a=0$ egyenlet. A 3.14. Lemma szerint az R ütemtervnek pontosan akkor van kritikus szituációja, ha $\Delta_a=0$-nak van $\omega_a \geq /1,0/$ megoldása, amely ϑ_1 és ϑ_2 racionális összefüggőségével ekvivalens. $\eta=0$, $\vartheta_1 \vartheta_2 > 0$ esetben tehát /i/ szükséges és elegendő feltétel.

Az $\eta=0$, $\vartheta_1 \vartheta_2=0$ esetben a GT ütemterveket egyértelmüen meghatározza az $s(o)=s_a$ kezdeti döntés és a 2. Megállapodás. Igy soha nincs kritikus szituáció. Ugyanez a helyzet a $\tau_i=0$, $\eta_{3-i} \vartheta_{3-i}>0$ esetben is. A $\tau_i=0$, $\vartheta_{3-i}=0$, $\eta_{3-i}>0$ esetben azonban bármelyik $s(o)=s_a$ döntés mellett a GT ütemterv $t=\eta_{3-i}$ pontjában a σ_0 kritikus szituáció lép fel, amelyben a döntést a 2.Megállapodás sem határozza meg /L.a 3.1. Táblázatot és a 3.3. Ábrát/. Ezzel bebizonyitottuk, hogy a $\tau_1 \tau_2=0$ degenerált esetekben az /ii/ és /iii/ feltételek szükségesek és elegendők, ahhoz, hogy egyetlen GT ütemtervnek se legyen kritikus szituációja.

A továbbiakban még azt kell bizonyitanunk, hogy az $\eta>0$, $\tau_1 \tau_2 > 0$ nem-degenerált esetekben a /iv/ feltétel szükséges és elegendő $\mathfrak{R}^{(a)}$ elemeire vonatkozóan. A 3.14. Lemma szerint a szükséges és elegendő feltétel az, hogy a $/3.11/_a$ egyenlőtlenségnek ne legyen $\omega_a \geq /1,o/$ megoldása. Mivel az $\eta_a>0$ következtében a /3.19/ egyenlőtlenségnek mindig van megoldása, a 3.17. Lemma szerint a $/3.11/_a$-nak csak /3.27/ mellett nem biztos, hogy van megoldása, azaz a 3.2.Táblázat $/ba/_a$ és $/bb/_a$ eseteiben. Ekkor a $/3.11/_a$ alakja

$$/3.31/ \qquad 0< \Delta_a \lessdot_{3-a} \eta .$$

Tehát $R\in\mathfrak{R}^{(a)}$ ütemtervnek, akkor és csak akkor nincs kritikus szituációja, ha /3.27/ teljesül és /3.31/-nek nincs $\omega_a \geq /1,o/$ megoldása.

A /3.31/-nek akkor és csak akkor nincs megoldása, ha egyetlen $\ell \geq 0$ egészhez sincs olyan $k \geq 1$ egész, hogy

$$0< k\tau_a - \ell\, \tau_{3-a} \lessdot_{3-a} \eta$$

azaz

$$0 < k - \ell \frac{\tau_{3-a}}{\tau_a} \leqslant_{3-a} \frac{\eta}{\tau_a}$$

teljesülne. Vagyis bármely $\ell \geq 0$ mellett minden $k \geq 1$ egészre

vagy $k - \ell \frac{\tau_{3-a}}{\tau_a} \leq 0$, vagy $\frac{\eta}{\tau_a} \leqslant'_{3-a} k - \ell \frac{\tau_{3-a}}{\tau_a}$

következik be.

Legyen $k_\ell = \left[\ell \frac{\tau_{3-a}}{\tau_a} \right]$. Akkor a $z-1 < [z] \leq z$ reláció felhasználásával azonnal adódik, hogy $k_\ell \geq 1$ esetén minden $1 \leq k \leq k_\ell$ mellett

$k - \ell \tau_{3-a}/\tau_a \leq 0$,

bármilyen $k_\ell \geq 0$ esetén minden $k \geq k_\ell + 2$ mellett $k - \ell \tau_{3-a}/\tau_a > 1$, és

$k = k_\ell + 1$ $/\geq 1/$ esetén

$0 < k - \ell \tau_{3-a}/\tau_a \leq 1$. Feltételünk tehát ekvivalens azzal, hogy

$$k = \left[\ell \frac{\tau_{3-a}}{\tau_a} \right] + 1$$

mellett teljesül az

$$\frac{\eta}{\tau_a} \leqslant'_{3-a} k - \ell \frac{\tau_{3-a}}{\tau_a}$$

reláció. Ez azonban ekvivalens az

$$\frac{\eta}{\tau_a} \leqslant'_{3-a} 1 - \left\{ \ell \frac{\tau_{3-a}}{\tau_a} \right\}, \text{ azaz}$$

$$/*/ \qquad \left\{ \ell \frac{\tau_{3-a}}{\tau_a} \right\} \leqslant'_{3-a} \frac{\vartheta_a - \eta_{3-a}}{\tau_a} = 1 - \frac{\eta}{\tau_a}$$

relációval. Igy az $R \in \mathfrak{R}^{(a)}$ ütemtervnek akkor és csak akkor nincs kritikus szituációja, ha /3.27/ és <u>minden ℓ-re</u> /*/ teljesül.

A 2.2. Tétel bizonyitásában a 2.3. pontban láttuk, hogy a $k\tau_a - \ell\tau_{3-a}$ alakú számok mindenütt sürüek, ha τ_a és τ_{3-a} racionálisan függetlenek. Ez azt jelenti, hogy ekkor a $k - \ell\frac{\tau_{3-a}}{\tau_a}$ számok is mindenütt sürüek és igy az

$$x_\ell \doteq \left\{\ell\frac{\tau_{3-a}}{\tau_a}\right\},\quad \ell=0,1,\dots$$

számok a $[0,1)$ intervallumban mindenütt sürüek. /Sőt ismeretes [K11],[W3] , hogy az $/x_\ell/$ sorozat egyenletes eloszlású a $[0,1)$ bármely részintervallumán./ Ezért irracionális τ_{3-a}/τ_a esetén a /*/ reláció nem teljesülhet minden $\ell \geq 0$ mellett, hiszen végtelen sokszor az $\left(1-\frac{\eta}{\tau_a}, 1\right)$ intervallumba is belép az x_ℓ sorozat. Ebből következik, hogy τ_1 és τ_2 racionális függősége szükséges feltétel.

A 2.2. Tétel utáni Megjegyzésben megmutattuk, hogy

$$\frac{\tau_{3-a}}{\tau_a} = \frac{k_{3-a}}{k_a},\quad k_a > 0,\ k_{3-a} \text{ relativ primek}$$

esetén az x_ℓ sorozat periodikusan végigfutja a k/k_a , $0 \leq k \leq k_a-1$ osztópontjait a $[0,1)$ intervallumnak, tehát ezeken egyenletes elsozlású. Ezért /*/ csak akkor teljesülhet minden $\ell \geq 0$ mellett, ha a $(k_a-1)/k_a$ utolsó osztópontra is teljesül, hogy

$$\frac{k_a-1}{k_a} \leq'_{3-a} 1-\frac{\eta}{\tau_a},\quad \text{azaz}$$

$$\frac{\eta}{\tau_a} \leq'_{3-a} \frac{1}{k_a},\quad \text{azaz}$$

$$\eta \leq'_{3-a} \frac{\tau_a}{k_a} \doteq q$$

teljesül.

Ezzel a /iv/ és /3.27/ feltételek együttes szükségességét és elegendőségét bizonyitottuk. A /3.27/ azonban a /3.28/ mellett redundancia, hiszen $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ miatt /3.29/-ből $q \leq \min/\tau_1, \tau_2/$ és igy $\eta = \eta_1 + \eta_2 \leq \min/\tau_1, \tau_2/$, amiből $\eta_i \leq \vartheta_{3-i}$, $i=1,2$, következik. Ezzel együtt a $\preccurlyeq_{3-a}$ relációjel /3.12/ alatti definiciójából következik a $\preccurlyeq'_{3-a}$ jel /3.29/ alatti formulája is.

Végül a $Q^{(1)}$ és $Q^{(2)}$ job-folyamok szimmetrikus szerepéből a /3.28/ és /3.29/-ben, következik, hogy ha még $\eta_{3-a} > 0$, azaz $\eta_1 \eta_2 > 0$ teljesül, akkor $\mathfrak{R}^{(a)}$ és $\mathfrak{R}^{(3-a)}$ egyaránt egyetlen ütemterv és /3.30/ igaz.

Q.e.d.

1. Megjegyzés: A 3.17. Lemma szerint a /iv/ esetekben, a 3.3. Ábra szerint viszont a /ii/-/iii/ esetekben R_{ao} periodikus.

2. Megjegyzés: A /iv/ feltétel szükségességéből következik, hogy $\eta_a = 0$ esetben az $\eta_{3-a} > 0$ és $\tau_1 \tau_2 > 0$, valamint /3.28/ feltétel mellett is kell lennie $R \in \mathfrak{R}^{(a)}$-ban kritikus szituációnak. Ez az eset a 3.2. Táblázat $/ab/_a$ esete, amelynél /3.11/-nek racionálisan összefüggő τ_a, τ_{3-a} esetén a 2.2. Tétel szerint mindig van megoldása. Legyen például $\eta_1 = 0$ és $\eta_2 > 0$. Ekkor a=2-re /iv/ teljesül, igy R_{2o}-nak nincs kritikus szituációja. Ezért a

$$0 < B_2 \tau_2 - A_2 \tau_1 \leq \eta_2$$

egyenlőtlenségnek /3.2. Táblázat $/ba/_2$ mező/ nincs megoldása. Azonban $k_1 \tau_2 - k_2 \tau_1 = 0$ teljesül.
A $0 \leq B_1 \tau_1 - A_1 \tau_2 < \eta_2$ egyenlőtlenségnek ekkor a megoldása csak $B_1 = k_2$, $A_1 = k_1$ lehet. Ugyanis, ha lenne kisebb

megoldása, akkor annak hibája legalább akkora lenne, mint a $\xi = \tau_1/\tau_2$ szám baloldali legjobb pozitiv hibájú közelitése. Ennek hibája azonban a /2.65/formula szerint pontosan $\frac{1}{k_2}$ nagyságú. Ezért $/B_1, A_1/$ helyébe ezt a közelitést téve, a hiba $\frac{\tau_2}{k_2}$ =q lesz. Ha tehát /3.28/teljesül, akkor az $/ab/_1$ esetben /3.11/-nek nem lehet $\Delta_a > 0$ tulajdonságú megoldása, mert a legkisebb pozitiv hibájú közelitő megoldásra is $\Delta_a = q$, márpedig $\eta_2 \prec'_1 q$. De /3.30/ szerint $\prec'_1 = <$, igy $\eta_2 < q$ a /3.28/ feltétel, ezért $\Delta_a > \eta_2$. Vagyis $\eta_a = 0$, $\eta_{3-a} > 0$ esetén /iv/ többi feltétele mellett $R \in \mathfrak{R}^{(a)}$-nak, $\eta_a > 0$ és $\eta_{3-a} = 0$ és /iv/ többi feltétele mellett $R \in \mathfrak{R}^{(3-a)}$-nak a $\mathfrak{S}_o$ az első visszatérő szituációja, hiszen $\Delta'_a = 0$ ill. $\Delta'_{3-a} = 0$ a /3.11/ legkisebb megoldására.

3. Megjegyzés: A 3.18. Lemma egyszerü lehetőséget nyújt kritikus szituáció nélküli GT ütemtervekkel rendelkező Q konfigurációk konstruálására. A degenerált esetektől eltekintve az alábbi módon kaphatunk ilyen konfigurációt.

- válasszunk tetszőleges k_1, k_2 pozitiv relativ prim egész számpárat
- válasszunk egy $q > 0$ valós számot
- válasszuk meg η_1 paramétert $0 < \eta_1 < q$ feltétellel
- válasszuk meg az η_2 paramétert a $0 \leq \eta_2 \leq q - \eta_1$ feltétellel
- képezzük ϑ_1 és ϑ_2 paramétereket a $\tau_1 = k_1 q$, $\tau_2 = k_2 q$, $\vartheta_1 = \tau_1 - \eta_1$, $\vartheta_2 = \tau_2 - \eta_2$ formulákkal.

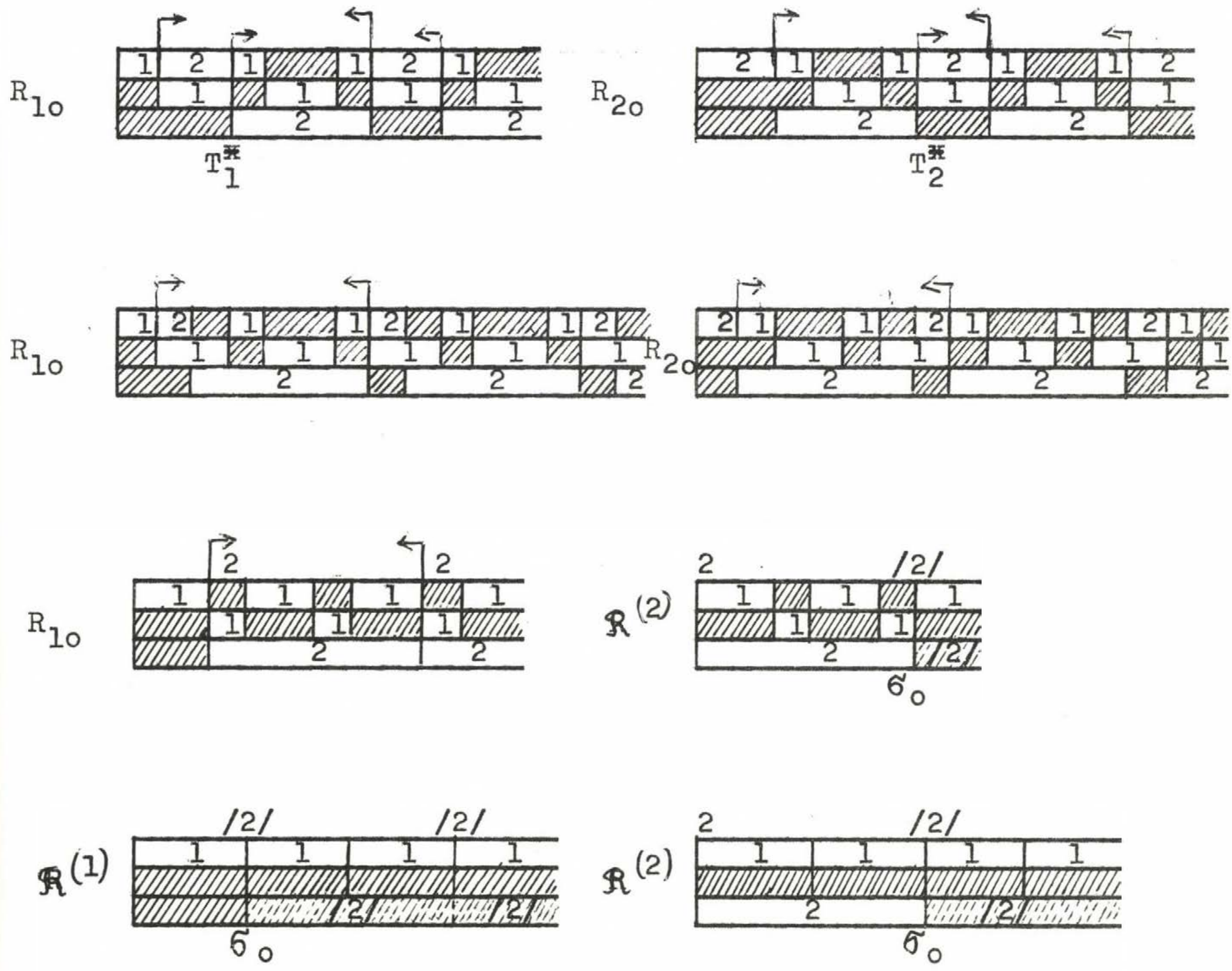
Az igy nyert $Q = /\eta_1; \vartheta_1; \eta_2; \vartheta_2/$ konfigurációnál az $R \in \mathfrak{R}^{(1)}$ ütemtervre teljesülnek a 3.18. Lemma /iv/ feltételei, ezért $\mathfrak{R}^{(1)}$ azonos R_{1o}-lal, amelynek nincs kritikus szituációja, összefüggő, szoros, következetes és periodikus, amelyben a β_1-szituáció visszatérő /3.17. Lemma/. $\eta_2=0$ esetén $\mathfrak{K}^{(2)}$ elemeinek σ_o kritikus szituációja lesz. η_1 és η_2 szerepe természetesen felcserélhető. Az alábbi 3.3. Táblázat néhány tipikus példát mutat a /iv/ feltételt kielégítő, fenti módon konstruált konfigurációra. A 3.5. Ábrán mutatjuk be ezek ütemterveinek kezdő szakaszait.

Mind a négy konfigurációnál

$$k_1=1, \quad k_2=2, \quad q=3, \quad \tau_1=3, \quad \tau_2=6.$$

Sorszám	η_1	ϑ_1	η_2	ϑ_2	σ_1^*	σ_1'	p_1	σ_2^*	σ_2'	p_2	Megjegyzés
1.	1	2	2	4	β_2	-	6	β_1	-	6	$R_{1o} \approx R_{2o}$
2.	1	2	1	5	-	-	6	-	-	6	$R_{1o} \not\approx R_{2o}$
3.	2	1	0	6	-	-	6	-	σ_o	-	$\eta_2=0$
4.	3	0	0	6	-	σ_o	-	-	σ_o	-	$\eta_1=q$, $\eta_2=0$, /iv/ nem teljesül

<u>3.3.Táblázat:</u> Kritikus szituáció nélküli konfigurációk



<u>3.5. Ábra:</u> Kritikus szituáció nélküli ütemtervek.

A 3.13. - 3.18. Lemmák feltárják a GT ütemtervek számos sajátosságát, amelyek azonban igy nehezen tekinthetők át. Ezért célszerü a főbb eredményeket egy tételbe foglalni.

3.5.Tétel: Bármely $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció GT ütemterveire igazak az alábbi megállapitások.

/A/ Az $\mathfrak{K}^{(a)}(Q)$ halmaz elemeinek a σ_a^* jellegzetes, a σ_a' első GT-kritikus szituációja, valamint az $\mathfrak{K}^{(Ga)}$ halmaz elemeinek σ_a'' első saját kritikus szituációja minden elemre egyszerre létezik, vagy nem létezik. Ha létezik, minden elemre azonos, ugyanazon pontban lép fel és az $s(o)=s_a$ első kritikus döntéssel meghatározott. Fellépési helyeikre a $0 \leq t_a' \leq T_a^* \leq T_a' \leq T_a'' \leq \infty$ érvényes. Az első kritikus pontig az azonos tipusú elemek kongruensek.

/B/ Az $\mathfrak{K}^{(GT)}(Q)$ halmaz összes elemére egyszerre létezik, vagy nem, a kritikus szituáció, és $\mathfrak{K}^{(1)} \approx \mathfrak{K}^{(2)}$ ha

/i/ $\eta=0$, $\vartheta_1 \vartheta_2 > 0$ és ϑ_1, ϑ_2 racionálisan függetlenek

/ii/ $\tau_1 \tau_2 = 0$

/iii/ valamelyik i=1,2 mellett

/3.32/ $$0 < \eta_{3-i} \leq \vartheta_i$$

és a

$$0 \leq \Delta_i \leq \eta$$

egyenlőtlenség legkisebb $\omega_i^* \geq /1,c/$ megoldására

$$\Delta_i^* = \eta$$

teljesül.

Az $\mathfrak{R}^{(1)}$ és $\mathfrak{R}^{(2)}$ megfelelő lényegében azonos elemei a T_i^*, ill. $t'_{3-i}=\eta_{3-i}$ pontjuktól megegyeznek egymással. A T_i^* értéke megfelelően a fenti eseteknek

/i/ $T_i^*=0$, $i=1,2$

/ii/ $T_i^*=\eta_{3-i}$, ha $\tau_i=0$

/iii/ $T_i^*=B_i^*\tau_i=A_i^*\tau_{3-i}+\eta$, ahol $\omega_i^*=/B_i^*, A_i^*/$.

Az /ii/ és /iii/ esetekben a T_i^* és t'_{3-i} pontokban fellépő közös szituáció a σ_i^* jellegzetes szituáció, amelynek tipusa az alábbi:

$$/3.33/ \quad \sigma_i^* = \begin{cases} \sigma_o & \text{ha} \quad \vartheta_{3-i}=0 \\ \beta_{3-i} & \text{ha} \quad \vartheta_{3-i}>0, \ 0\le\eta_i\le\vartheta_{3-i} \\ \sigma_{i,o} & \text{ha} \quad 0<\vartheta_{3-i}<\eta_i \end{cases}$$

Ha még a /3.32/ mellett $0\le\vartheta_{3-i}<\eta_i$ és $\vartheta_i\equiv\eta_{3-i}$ /mod τ_{3-i}/, akkor $\omega_i^*=/1,[\vartheta_i/\tau_{3-i}]/$, $T_i^*=\tau_i$, $\sigma_i^*=\beta_{3-i}$.

/C/ Az $\mathfrak{R}^{(a)}$ egyetlen R_{ao} ütemtervből áll, amely összefüggő, /kvázi/ szoros és /kvázi/ következetes, ha

/i/ $\eta=0$, $\vartheta_1\vartheta_2>0$ és ϑ_1, ϑ_2 racionálisan függetlenek

/ii/ $\tau_1=\tau_2=0$

/iii/ $\tau_i=0$, $\vartheta_{3-i}>0$ valamelyik $i=1,2$ mellett

/iv/ $\eta_a>0$, $\tau_1\tau_2>0$, τ_1, τ_2 racionálisan összefüggők és

$\eta\le\vartheta'_{3-a}q=\tau_1/k_1=\tau_2/k_2$, ahol k_1, $k_2>0$ relativ primek.

Az R_{ao} az /i/ eset kivételével periodikus és periodushossza megfelelően

/ii/ $p_a=0$

/iii/ $p_a=\tau_{3-i}$

/iv/ $p_a=B''_a\tau_a=A''_a\tau_{3-a}$, ahol $\omega''_a=/B''_a,A''_a/$

a $\Delta_a=0$ egyenlet legkisebb $\omega_a\geq/1,0/$ megoldása.

Az R_{ao}-ban nevezetes visszatérő szituáció

/iii/ a β_{3-i}-szituáció az $\eta_{3-i}+k\tau_{3-i}$, k=0,1,... pontokban

/iv/ a β_a-szituáció az η_a+kp_a, k=0,1,... pontokban

Az $\mathfrak{R}^{(GT)}(Q)=\{R_{1o}, R_{2o}\}$ az /i/-/iii/ esetekben, valamint a /iv/ esetben $\eta_1\eta_2>0$ mellett.

<u>Bizonyitás:</u> A bizonyitás lényegében a 3.14. - 3.18. Lemmákra történő hivatkozással történik.

/A/ Definició szerint $T^*_a\leq T'_a$, ezért a σ^*_a közös volta $\mathfrak{R}^{(a)}$ elemeire következik a 3.12. Lemma /2/ állításából. A σ'_a és σ''_a azonossága és azonos helye $\mathfrak{R}^{(a)}$ elemeinél, következik a 3.14. Lemmából.

/B/ Az $\mathfrak{R}^{(1)}\approx\mathfrak{R}^{(2)}$ következik a σ^*_i közös jellegzetes szituáció létéből, amely az /ii/ esetben a 3.1. Táblázatból olvasható ki, /iii/ esetben pedig a 3.15. Lemma állitása. A /3.32/ feltétel a 3.15. Lemma utáni 1.Megjegyzéssel áll összhangban. A /3.33/ következik a 3.15. Lemmából. Az /i/ esetben σ^*_i jellegzetes szituáció nem létezik, azonban a t=0 pontbeli $\{\sigma\}_o$ halmaz utolsó eleme azonos, ezért $T^*_i=0$ ponttól R_{1o} és R_{2o} megegyeznek.

A /B/ alatti utolsó állitást a 3.15. Lemma utáni 3. Megjegyzésben bizonyitottuk.

/C/ Az első állitás azonos a 3.18. Lemmával. A prioritás következik a 3.17. Lemmából, illetve degenerált esetben leolvasható a 3.3. Ábrákról. A visszatérő β-szituáció bizonyitása ugyanez. Az $\mathfrak{R}^{(GT)}$ kételemü volta az /i/-/iii/ esetekben a 3.1. Táblázatból, az /iv/ esetben a 3.18. Lemmából következik.

Q.e.d.

3.5. Prioritásos ütemtervek.

A gyakorlatban alkalmazott ütemezési stratégiák sokszor prioritásos jellegüek, amelyeknél "kritikus szituációkban" az igények prioritása határozża meg az ütemezési döntést /nem feltétlenül egyértelmüen/.

Job-folyamok ütemezésénél sztochasztikus esetben szintén elsősorban prioritásos stratégiákat vizsgáltak tüzetesebben /ℓ. Arató [A4] és Tomkó [T6] munkákat/. A prioritás ilyenkor osztály, nem dinamikus prioritás. Ez a teljes ütemezés folyamán változatlan /ℓ. 1.1. pontban is/. A továbbiakban mi is elsősorban prioritásos ütemezéseket fogunk vizsgálni. Ez azonban nem szakad el eddigi vizsgálatainktól, mert a GT ütemtervek speicális egyedeit szolgáltatják az egyes konfigurációknál.

Kétféle prioritást vizsgálunk. Az egyiknél a prioritás csak annyi előnyt jelent, hogy üres P_A processzorra a várakozó igények közül a magasabb prioritásút ütemezzük először megszakitás nélkül. A másik prioritás megszakitó, ami azt jelenti, hogy amikor a magasabb prioritású job-folyam igényli a P_A processzort, azt megkapja olyan áron is, hogy a másik job-folyam kiszolgálását felfüggesztjük, ha folyamatban volt. Mivel job-folyam párról van szó, mindössze két prioritási osztály van és mindegyikben egy job-folyam. Vagyis összesen négyféle prioritásos ütemezése lehet bármely $Q \in \mathcal{Q}$ konfigurációnak.

A prioritásos ütemezés elvéből következik azonban, hogy az szoros, mindig ütemezni kell szabad processzorra, ha van kiszolgálásra kész igény. Ez azt is jelenti, hogy minden szituációban domináns döntést kell alkalmazni.

Igy a prioritásos ütemezés eredménye mindig GT ütemterv. A GT ütemezésnél éppen a kritikus szituációk azok, amelyekben két alternativ döntés közül csak a valamelyik job-folyam késleltetése árán lehet választani. A természetes ütemezésnél a $\sigma_{i,o}$ tipusú kritikus szituációkban a szorosság egyértelmüvé teszi a megteendő kritikus döntést. A döntés egyértelmüen s_i. σ_o szituációkban a prioritás dönti el, melyik kritikus döntést hozzuk - mindenesetre következetesen. A gazdaságos ütemezés eleve szoros. Ott az abszolut prioritás /megszakitó/ azt eredményezi, hogy σ_o, $\sigma_{i,1}$, i=1,2, tipusú kritikus szituációkban egyaránt és következetesen ugyanazt a $Q^{(a)}$ job-folyamot kell ütemezni: azt amelyiknek prioritása van. A prioritásos ütemezések tehát <u>következetesek</u> is a 3.4. Tétel szerint.

Ezzel máris igazoltunk egy igen fontos tételt.

<u>3.6. Tétel:</u> Minden prioritásos ütemterv szoros és következetes GT ütemterv.

<u>Bizonyitás:</u> Kész.

Q.e.d.

Definiáljuk most formálisan is a négy prioritásos ütemezést. Legyen

S_{ao} stratégia összefüggő, szoros és következetes ütemezés a $Q^{(a)}$ job-folyam előnyével, a=1,2; $S_{a,3-a}$ stratégia megszakitásos, szoros és következetes ütemezés a $Q^{(a)}$ job-folyam prioritásával, a=1,2; S_{ab}, a=1,2, b=0,3-a, ezek közös jelölése; $R_{ab} \doteq R_{ab}(Q)=S_{ab}(Q)$ a $Q \in \mathcal{Q}$ konfiguráció ütemezésének és ütemtervének alternativ jelölései az S_{ab} stratégia alkalmazása esetén; X_{ab} az R_{ab} ütemterv valamely X jellemzőjének megkülönböztető jelölése /igy pl. γ_{ab} a hatékonyság, p_{ab} a periodushossz, stb./

Bármely $Q\in\mathcal{Q}$ konfigurációra igy a következő négy prioritásos ütemtervet definiáltuk:

R_{1o}: összefüggő szoros és következetes ütemterv a $Q^{(1)}$ job-folyam előnyével σ_o szituációkban;

R_{2o}: összefüggő szoros és következetes ütemterv a $Q^{(2)}$ job-folyam előnyével σ_o szituációban;

R_{12}: megszakitásos szoros és következetes ütemterv a $Q^{(1)}$ job-folyam prioritásával σ_o, $\sigma_{i,1}$ szituációkban;

R_{21}: megszakitásos szoros és következetes ütemterv a $Q^{(2)}$ job-folyam prioritásával σ_o, $\sigma_{i,1}$ szituációkban.

E négy ütemterv alkotja a Q prioritásos ütemterveinek halmazát. Ez sokszor két elemre csökken az alábbi korollárium szerint.

3.1. Korollárium: Ha az $R^{(a)}$ egyetlen R_{ao} ütemterv, akkor R_{ao} éppen a prioritásos ütemterv a $Q^{(a)}$ job-folyam előnyével, vagy prioritásával. Ebben az esetben $R_{a,3-a}(Q)=R_{ao}(Q)$ /a=1,2/.

Bizonyitás: Ez következik a 3.6. Tételből, mely szerint prioritásos ütemterv csak GT ütemterv lehet.

Q.e.d.

A 3.6. Tétel jelentősége az, hogy aszerint a prioritásos ütemtervek az $\mathfrak{R}^{(GT)}$ halmaz elemei, ezért rendelkeznek a GT ütemtervek közös tulajdonságaival. Pontosabban az R_{ao} ütemterv egy $\mathfrak{R}^{(a)}$-beli T-ütemterv és az $R_{a,3-a}$ ütemterv egy $\mathfrak{R}^{(a)}$-beli G-ütemterv.

Ezért értelme van a prioritásos ütemtervek olyan jellemzőiről beszélni, amelyek a GT ütemtervek sajátjai: kritikus szituáció, határozott szakasz, stb. Valójában már nincs kritikus szituáció és a teljes R_{ab} ütemterv meghatározott az $s(o)= s_a$ első döntés által, de strukturájának elemzésekor hasznos, mint GT ütemtervet felfogni és annak strukturális elemeire hivatkozni. Egyébként hangsulyozzuk, hogy

az R_{ao} olyan T-ütemterv, amelynél a kritikus döntések következetesen

σ_o szituációban: s_a

$\sigma_{i,o}$ szituációban: s_i , $i=1,2$;

az $R_{a,3-a}$ olyan G-ütemterv, amelynél a kritikus döntések következetesen

mind a σ_o , mind a $\sigma_{i,1}$ szituációkban: s_a .

A T A N U L M Á N Y O K sorozatban 1978-ban megjelentek:

73/1978	S.A.COONS: Homogeneous coordinates, projective transformations, and conics
74/1978	Wolfgang Franke: Vorträge über das Graphische Display GD'71
75/1978	Vasskövi István - Galbavy Márta: Anyagszétválasztási rendszerek tervezésének és optimális üzemeltetésének általános megközelitése
76/1978	Somló János - Nagy Judit: Módszerek munkadarabok forgácsoló megmunkálási folyamatának optimalizálására
77/1978	Szászné Turchányi Piroska: Optimalizálási feladatok csomagkapcsolt számitógéphálózatok tervezésénél
78/1978	Darvas Péter - Gallai István - Hosszu Péter - Krammer Gergely: Papers of Computer Graphics
79/1978	Dr Adolf Kotzauer: Beschriftung und Bemassung von automatisch erstellen zeichnungen unter Benutzung des graphisches Dialogs
80/1978	Prékopa András: Studies in applied stochastic programming I. /Cikkgyüjtemény/
81/1978	Peter Bonitz: Ein Beitrag zur Theorie des Entwurfs doppelt gekrümmter Flächen unter differentialgeometrischen und rechentechnischen Aspekten
82/1978	Tankó József: Szabályos job-folyam párok ütemezésének vizsgálata I.
	/Technikai akadályok miatt 1979-ben jelenik meg/

83/1978 Tankó József: Szabályos job-folyam párok ütemezésének vizsgálata I.
/Technikai akadályok miatt 1979-ban jelenik meg/

84/1978 Bányász Csilla - Keviczky László: Discrete time identification of linear dynamic process

85/1978 Dr Hoffmann Péter: Számitógépes szerszámgépvezérlés egy alkatrészprogramozási módszere

86/1978 Ruda Mihály: A SIS77 Statisztikai Információs Rendszer kialakitásának szempontjai, alkalmazásának és továbbfejlesztésének lehetőségei

87/1978 Téli iskola

88/1978 Gaál Balázs - Hermann Gyula - Horváth László - Renner Gábor - Várady Tamás: Szoborszerü felületek tervezése és megmunkálása

1979-ben eddig megjelentek:

88/1979 Gaál Balázs - Hermann Gyula - Horváth László - Renner Gábor - Várady Tamás: Szoborszerü felületek tervezése és megmunkálása

89/1979 Ruda Mihály: A SIS77 statisztikai információs rendszer

90/1979 Bányász Csilla - Keviczky László: Optimum insensitivity of the discrete-continuous transformation /megjelenés előtt/

91/1979 Mikroprocesszorok és mikroprocesszor-bázisu rendszerek architekturája és strukturája
- Téli iskola, Szentendre -